CORRIGÉ Test à blanc de Dynamique des Structures

Dr. Pierino Lestuzzi

Semestre automne – 2018

Exercice 1: [3 pts]

On considère le portique à deux étages de la figure ci-dessous. On s'intéresse aux oscillations du plancher supérieur. Le plancher intermédiaire étant de masse négligeable.

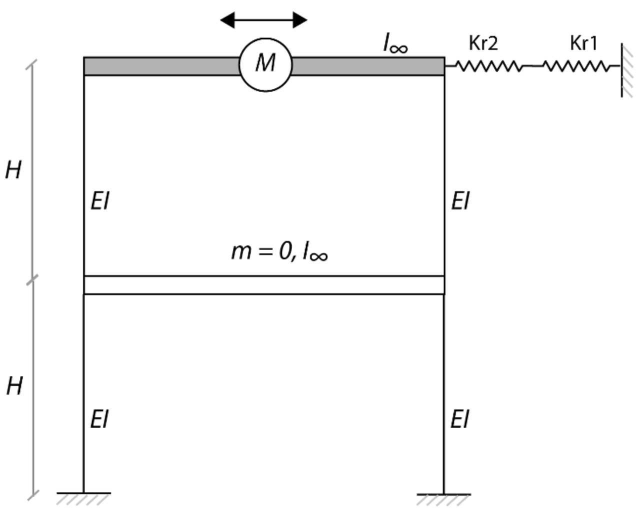
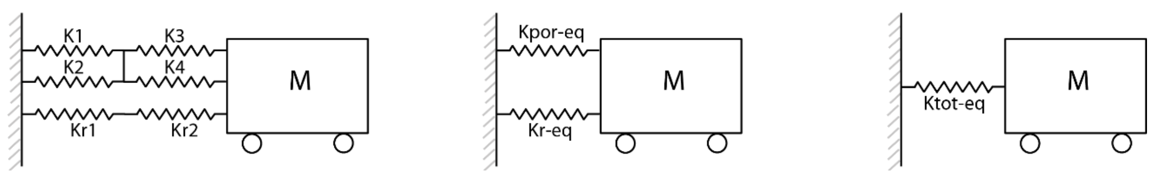


Figure. Portique à deux étages

E = 200 GPa
I = 200 10^6 mm^4
H = 3 m
M = 2 t
Kr1 = 8 MN/m
Kr2 = 12 MN/m

1. Dessiner le système fondamental masse-ressort.



/ 1 pts

2. Déterminer la pulsation propre de la structure

Soient :

$K_{éq-por1}$: la rigidité équivalente des deux poteaux du rez-de-chaussée du portique :

$$K_{éq-por1} = 2 \cdot \frac{12EI}{H^3} = \frac{24EI}{H^3}$$

$K_{éq-por2}$: la rigidité équivalente des deux poteaux du premier étage du portique:

$$K_{éq-por2} = 2 \cdot \frac{12EI}{H^3} = \frac{24EI}{H^3}$$

$K_{éq-por1}$ et $K_{éq-por2}$ sont en série, la rigidité équivalente de la structure s'écrit donc :

$$\frac{1}{K_{por-éq}} = \frac{1}{K_{éq-por1}} + \frac{1}{K_{éq-por2}} \rightarrow K_{por-éq} = \frac{K_{éq-por1} \cdot K_{éq-por2}}{K_{éq-por1} + K_{éq-por2}} = \frac{12EI}{H^3}$$

On obtient :

$E = 200\ 10^9\ N\ /\ m^2$

$I = 2\ 10^{-4}\ m^4$

$K_{éq-por1} = K_{éq-por2} = 3.556\ 10^7 N/m$

$K_{por-éq} = 1.778\ 10^7\ N\ /\ m$

Il faut considérer aussi la contribution des ressorts appliques directement sur la masse au deuxième étage. Les deux ressorts sont appliqués entre eux en série. Donc :

$$\frac{1}{K_{r-éq}} = \frac{1}{K_{r1}} + \frac{1}{K_{r2}} \rightarrow K_{r-éq} = \frac{K_{r1} \cdot K_{r2}}{K_{r1} + K_{r2}}$$

$K_{r1} = 8\ 10^6 N/m$

$K_{r2} = 12\ 10^6 N/m$

$K_{r-eq} = 4.8\ 10^6 N/m$

Les ressorts du portique et les ressorts applique directement sur la masse au deuxième étage sont en parallèle. Donc :

$K_{tot-eq} = K_{por-eq} + K_{r-eq} = 2.258\ 10^7 N/m$

La pulsation propre de la structure : $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{éq}}{M}} = 106.25\ rad/s$

/ 2 pts

Exercice 2: [7 pts]

Une machine tournante est supportée par un système d'isolateurs reposant sur un plancher. En fonctionnement, la machine génère une force harmonique verticale dont l'amplitude est de F_0= 400N. En variant la fréquence d'excitation, on a déterminé que l'amplitude maximum de la force transmise du système des isolateurs au plancher était égale à 1080N à la résonance.

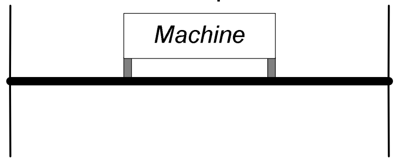


Figure. Le plancher étudiée supportant une machine vibrante

Données :
La masse de la machine : m = 200 kg
La rigidité totale des isolateurs : k = 10^6 N/m

1. Déterminer le coefficient d'amortissement du système d'appui de la machine.

Le facteur d'amplification (R_f) vaut le rapport entre la force transmise par le système des isolateurs au plancher et l'amplitude F_0 :

$$\mathrm{R_f} = \frac{\mathrm{F_{TR,max}}}{\mathrm{F_0}} = \frac{1080\ \mathrm{N}}{400\ \mathrm{N}} = 2.7$$

À la résonance R_f vaut

$$R_f = \frac{\sqrt{1+4\cdot\zeta^2}}{2\cdot\zeta} \quad \rightarrow \quad 2.7 = \frac{\sqrt{1+4\cdot\zeta^2}}{2\cdot\zeta} \quad \rightarrow \quad 5.4\cdot\zeta = \sqrt{1+4\cdot\zeta^2}$$

$$29.16\cdot\zeta^2 = 1+4\cdot\zeta^2 \quad \rightarrow \quad 25.16\cdot\zeta^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \zeta^2 = \frac{1}{25.16}$$

$$\zeta = \pm\sqrt{0.040} \quad \rightarrow \quad \zeta = 0.2$$

/ 2 pts

2. Déterminer la pulsation de fonctionnement de la machine pour que la force transmise au plancher ne dépasse pas 50% de F_0= 400N.

C'est possible résoudre l'exercice d'une façon graphique, en utilisant le graphe approprié, et d'une façon analytique qui s'agit d'une équation en ω^4.

A) La valeur du 50% de F_0 est obtenue pour une valeur de R_f égal à 0.5. Il s'agit de chercher sur le graphe de R_f la valeur du rapport ω/ω_n pour la courbe de l'amortissement ζ égal à 0.2.
Cette valeur peut être estimée (comme le montre la figure A) égale à environ ω/ω_n = 1.8.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{10^6}{2 \cdot 10^2}} = 70.71\ rad/s$$

$$\omega = \omega_n \cdot 1.8 = 127.28\ rad/s$$

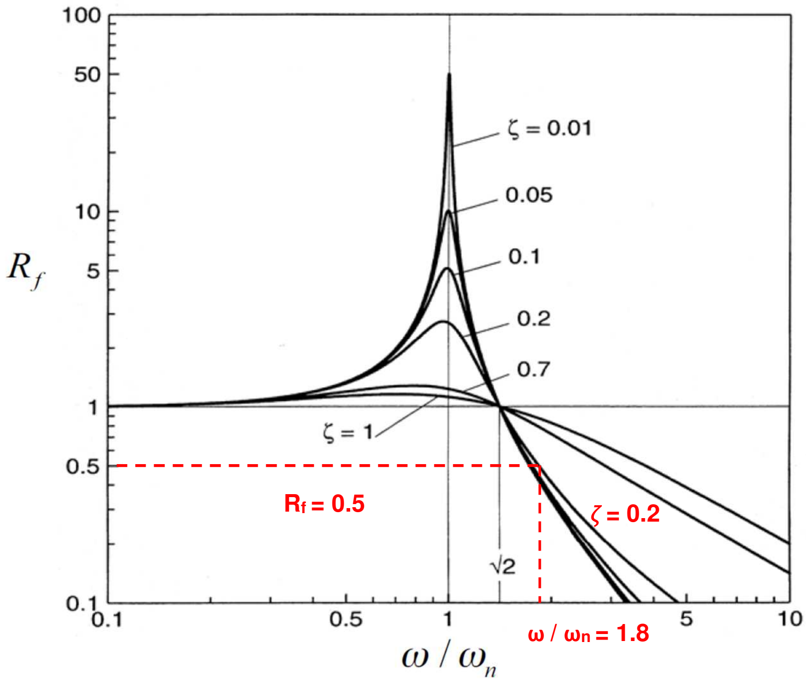


Figure A. Graphe facteur Rf

B) D'une façon analytique, l'exercice peut être résolu en imposant que le facteur Rf soit égal à 0.5.

$$\frac{\sqrt{1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} = 0.5$$

$$1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 0.25 \cdot \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]$$

$$0.25 \cdot \omega^4 - 3.10 \cdot 10^3 \cdot \omega^2 - 1.875 \cdot 10^7 = 0$$

$$\omega^2 = 16.86 \cdot 10^3\ rad^2/s^2$$

$$\omega = 129.85\ rad/s$$

La valeur obtenue de la façon analytique (ω=127.28 rad/s) ≈ (ω=129.85 rad/s) obtenue avec l'analyse du graphe.

/ 3 pts

3. Quel serait l'amortissement nécessaire pour que la force transmise au plancher soit minimale si la machine fonctionne avec une fréquence égale à 15.92 Hz.

Il n'y a aucune relation entre l'amortissement et la force transmise car le rapport entre ω et ω_n est égal à $\sqrt{2}$.

La valeur de ω pour une fréquence de 15.92 Hz est égal à :

$$\omega = f \cdot 2\pi = 99.98\, rad/s$$

Le rapport entre ω et ω_n est égal à :

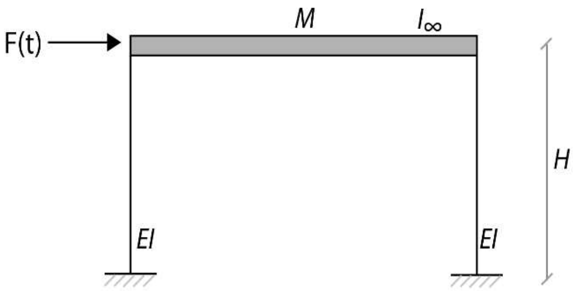
$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{99.98}{70.71} \approx 1.414 = \sqrt{2}$$

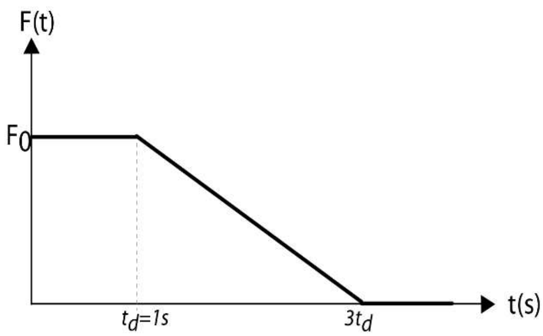
Pour un rapport $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$ le facteur R_f est égal à 1 pour toute valeur d'amortissement.

/ 2 pts

Exercice 3: [7 pts]

Le bâtiment d'un étage montré dans la figure ci-dessous est soumis à une charge provenant d'une explosion dont l'effet peut être représenté par une force latérale appliquée au niveau du toit.





Données :
On admet que l'amortissement est négligeable (ζ=0).

F_0 = 150 kN I = 10^8 mm^4 E = 210 10^3 N/mm^2

M = 3 tonnes H = 3 m

1. Déterminer l'expression analytique de la réponse de la structure pour $0 \le t \le t_d$.

La force est constante entre t = 0 et t = t_d, donc en utilisant l'intégrale de Duhamel on peut montrer que la réponse s'écrit :

$$x(t) = \frac{F_0}{K} \cdot (1 - cos\omega_n t)$$

F_0 = 150 kN

$$K_{éq} = K_1 + K_2 = 2 \cdot \frac{12EI}{H^3} = 186.67 \cdot 10^5 \ N/m$$

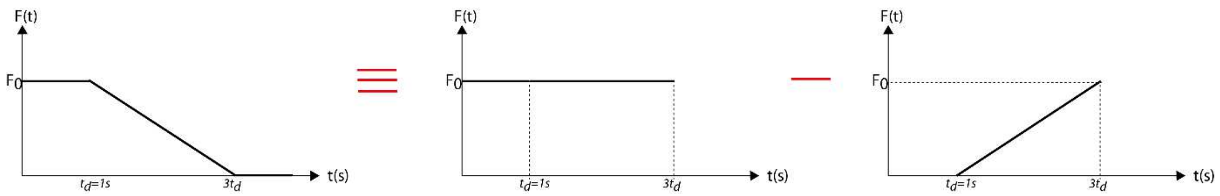
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{éq}}{M}} = \sqrt{\frac{186.67 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^3}} = 78.88 \ rad/s$$

$$x(t) = 0.0080 \cdot [1 - \cos(78.88t)]$$

/ 2 pts

2. Déterminer l'expression analytique de la réponse de la structure pour $t_d \le t \le 3t_d$.

On peut utiliser la superposition des effets. En fait :



Une force constante

Une force augmentant linéairement qui commence à t=t_d

La réponse d'une structure à une force constante ($F(t) = F_0$) est exprimée par :

$$x_1(t) = \frac{F_0}{K} \cdot (1 - cos\omega_n t)$$

La réponse d'une structure à une force augmentant linéairement ($F(t) = F_0 \cdot \left(\frac{t-t_d}{2t_d}\right)$ est exprimée par :

$$x_2(t) = \frac{F_0}{2m\omega_n{}^2 t_d} \cdot \left[t - \frac{1}{\omega_n} sin\omega_n(t - t_d) - t_d\right]$$

La réponse de la structure :

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{K} \cdot \left[\frac{3}{2} - cos\omega_n t - \frac{t}{2t_d} + \frac{sin\omega_n(t - t_d)}{2\omega_n t_d}\right]$$

$$x(t) = 0.0080 \cdot \left[1.5 - \cos(78.88t) - \frac{t}{2} + \frac{\sin(78.88(t-1))}{157.76}\right]$$

$$\dot{x}(t) = 0.0080 \cdot \left[78.88\sin(78.88t) - \frac{1}{2} + \frac{\cos(78.88(t-1)}{2})\right]$$

Alternativement l'exercice peut être résolu avec l'intégrale de Duhamel pour chaque intervalle (il faut se rappeler d'ajouter les conditionnes initiales X_0 et V_0 à chaque intervalle). En tout cas la résolution avec la superposition des effets est à préférer car beaucoup plus simple au niveau numérique.

/ 4 pts

3. Quel sera le comportement de la structure après l'instant t = $3t_d$? Donner une petite description (2-3 lignes de texte) du comportement sans établir les équations. Déterminer la valeur de l'amplitude maximale des oscillations de la structure pour t ≥ $3t_d$.

La structure continue à osciller après que la force s'annule à t = $3t_d$, à cause des conditions initiales non nulles (déplacement et vitesse à l'instant t = $3t_d$) avec des oscillations libres non amorties.
Avec des oscillations libres non amorties pour $t \geq 3t_d$ donc l'amplitude des oscillations s'écrit :

$$x_{max} = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}$$

Avec :

$$x_0 = x\ (t = 3t_d)$$

$$x_0 = 0.0080 \cdot \left[1.5 - \cos(78.88 \cdot 3) - \frac{3}{2} + \frac{\sin(78.88(3-1))}{157.76}\right]$$

$$x_0 = 0.0080 \cdot [1.5 - 0.523 - 1.5 + 0.004]$$

$$x_0 = -0.0042\ m$$

$$V_0 = \dot{x}\ (t = 3t_d)$$

$$V_0 = 0.0080 \cdot [-67.237 - 0.5 + 0.389]$$

$$V_0 = -0.5388\ m/s$$

$$x_{max} = \sqrt{(-0.0042)^2 + \left(\frac{-0.5388}{78.88}\right)^2}$$

$$x_{max} = \sqrt{(-0.0042)^2 + (-0.0068)^2}$$

$$x_{max} = \sqrt{0.000018 + 0.000046} = \sqrt{0.000064} = 0.008\,m = 8\,mm$$

/ 1 pt

Question 4: [3 pts]

Soit le système de corps rigides suivant formé de poutres infiniment rigides en flexion :

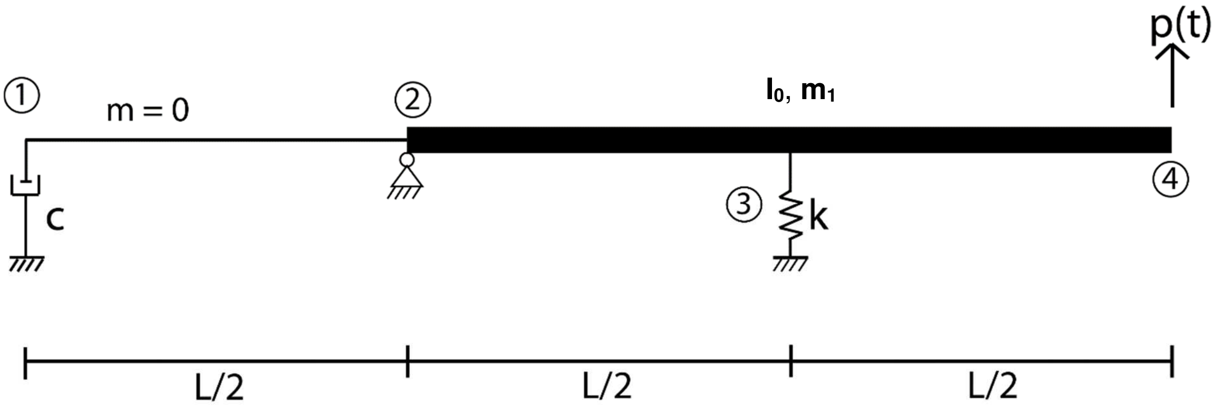
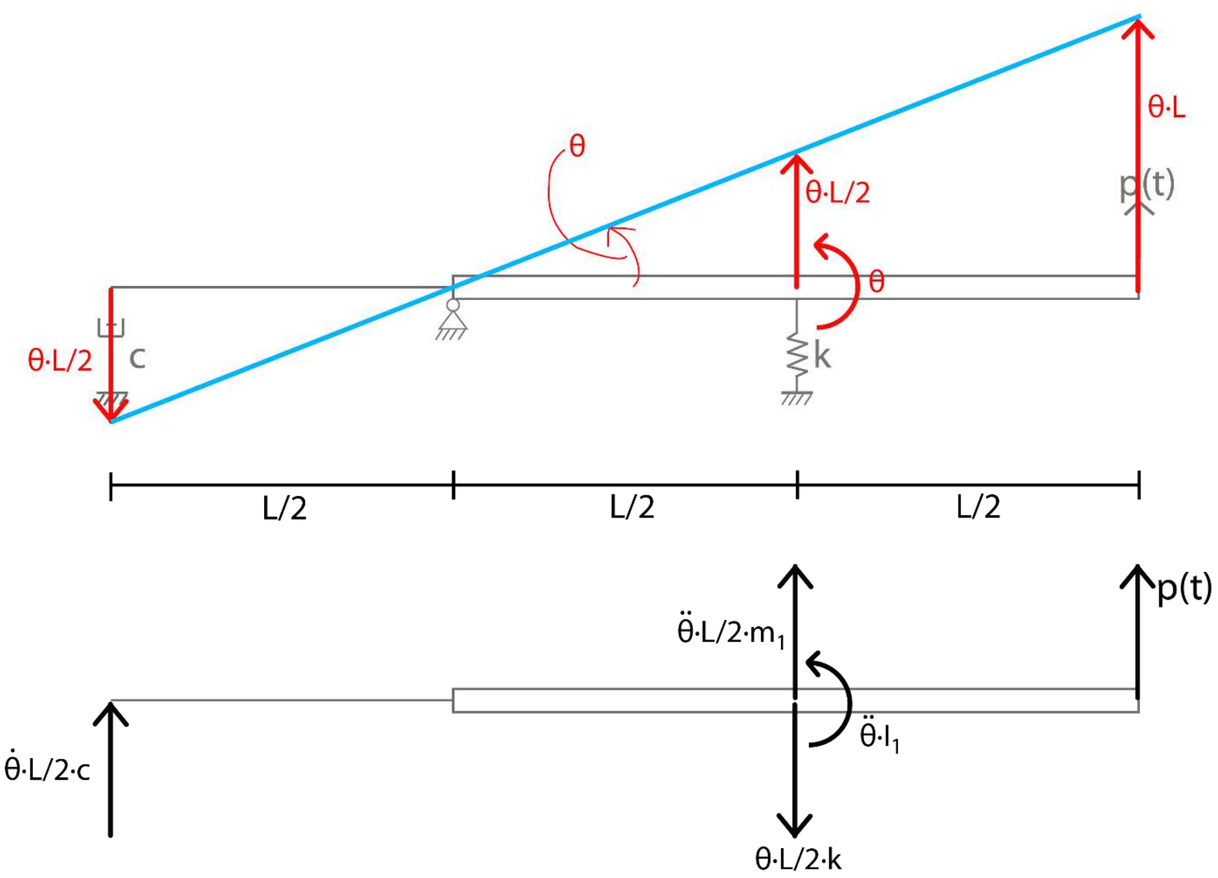


Figure. Système de corps rigides

Inertie en rotation : $I_0 = \frac{m_1 L^2}{12}$

1. Formuler l'équation de la rotation (en fonction du temps) autour du point 2, en utilisant le principe des travaux virtuels.



Elément	Position	Force	Déplacement virtuel	Travail virtuel
Inertie	2-4 (rotation)	$\frac{m_1 L^2}{12} \cdot \ddot{\theta}$	$\delta\theta$	$\frac{m_1 L^2}{12} \cdot \ddot{\theta} \cdot \delta\theta$
	2-4 (translation)	$\frac{\ddot{\theta} L}{2} \cdot m_1$	$\delta\theta \cdot \frac{L}{2}$	$\frac{\ddot{\theta} L}{2} \cdot m_1 \cdot \delta\theta \cdot \frac{L}{2}$
Ressort	Point (3)	$-\frac{\theta L}{2} \cdot k$	$\delta\theta \cdot \frac{L}{2}$	$-\frac{\theta L}{2} \cdot k \cdot \delta\theta \cdot \frac{L}{2}$
Amortisseur	Point (1)	$\frac{\dot{\theta} L}{2} \cdot c$	$-\delta\theta \cdot \frac{L}{2}$	$-\frac{\dot{\theta} L}{2} \cdot c \cdot \delta\theta \cdot \frac{L}{2}$
Force extérieure	Point (6)	$p(t)$	$\delta\theta \cdot L$	$p(t) \cdot \delta\theta \cdot L$

Les travaux virtuels s'égalisent : $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$

$$\frac{m_1 L^2}{12} \cdot \ddot{\theta} \cdot \delta\theta + \frac{\ddot{\theta} L}{2} \cdot m_1 \cdot \delta\theta \cdot \frac{L}{2} = -\frac{\theta L}{2} \cdot k \cdot \delta\theta \cdot \frac{L}{2} - \frac{\dot{\theta} L}{2} \cdot c \cdot \delta\theta \cdot \frac{L}{2} + p(t) \cdot \delta\theta \cdot L$$

En regroupant les termes $\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta$:

$$\left(\frac{m_1 L^2}{12} + \frac{m_1 L^2}{4}\right) \cdot \ddot{\theta} + \left(\frac{L^2}{4} \cdot c\right) \cdot \dot{\theta} + \left(\frac{L^2}{4} \cdot k\right) \cdot \theta = p(t) \cdot L$$

En divisant par L :

$$\left(\frac{m_1 L}{12} + \frac{m_1 L}{4}\right) \cdot \ddot{\theta} + \left(\frac{L}{4} \cdot c\right) \cdot \dot{\theta} + \left(\frac{L}{4} \cdot k\right) \cdot \theta = p(t)$$

On obtient :

$$\left(\frac{m_1 L}{3}\right) \cdot \ddot{\theta} + \left(\frac{L}{4} \cdot c\right) \cdot \dot{\theta} + \left(\frac{L}{4} \cdot k\right) \cdot \theta = p(t)$$

/ 2 pt

2. Déterminer l'expression de la pulsation propre et l'amortissement ζ.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{\left({kL}/{4}\right)}{\left({m_1 L}/{3}\right)}}$$

$$\zeta = \frac{C^*}{2M^* \omega_n} = \frac{{cL}/{4}}{2M^* \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}} = \frac{{cL}/{4}}{2\sqrt{M^* K^*}} = \frac{{cL}/{4}}{2\sqrt{\left({m_1 L}/{3}\right)\left({kL}/{4}\right)}}$$

/ 1 pt