1. Module d'élasticité du béton selon SIA 262

Béton C 25/30 : f_{ck} = 25 N/mm^2
f_{cm} = 33 N/mm^2
$E_{cm} = k_E \cdot f_{cm}^{1/3} = 8000 \cdot \sqrt[3]{33}$ = 26 000 N/mm^2
f_{cd} = 16.5 N/mm^2

2. Matrices de rigidité et des masses

matrice de flexibilité:

$$\underline{Flex} = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix} = \frac{2.8^3}{6 \cdot 26 \cdot 10^9 \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix}$$

matrice de rigidité:

$$\underline{K} = \underline{Flex}^{-1} = \frac{6 \cdot 26 \cdot 10^9 \cdot I}{2.8^3} \cdot \begin{bmatrix} 3.0769 & -1.7692 & 0.4615 \\ -1.7692 & 1.6923 & -0.6154 \\ 0.4615 & -0.6154 & 0.2692 \end{bmatrix}$$

matrice des masses:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 400 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 400 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \cdot 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 400 \cdot 10^3 \ kg$$

```
% Introduction des matrices de flexibilite (Flex) et des masses (M) ; calcul de la matrice de rigidite (K)
h = 2.8;
E = 2.6e10;
I = 1.747; %choisir la direction de la verification
Flex=(h^3/(6*E*I))* [2 5 8;5 16 28;8 28 54];
M=[400e3 0 0;0 400e3 0;0 0 400e3];
K=inv(Flex);
%
```

---

3. Fréquences propres et modes propres

somme des inerties : $\Sigma I_{long} = \frac{0.3 \times 3.5^3}{12} + \frac{0.3 \times 3.0^3}{12} = 1.747 \ m^4$

$\Sigma I_{transv} = 2 \times \frac{0.3 \times 4.0^3}{12} = 3.2 \ m^4$

Matrice des vecteurs modaux : $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.1564 & 0.8417 & -1.0000 \\ 0.5316 & 1.0000 & 0.6990 \\ 1.0000 & -0.6633 & -0.2152 \end{bmatrix}$

pulsations propres : $\omega_{long}^2 = \begin{bmatrix} 442.5 & 0 & 0 \\ 0 & 18973 & 0 \\ 0 & 0 & 136965 \end{bmatrix} \frac{N}{m \cdot kg}$

$\omega_{transv}^2 = \begin{bmatrix} 810.6 & 0 & 0 \\ 0 & 34753 & 0 \\ 0 & 0 & 250880 \end{bmatrix} \frac{N}{m \cdot kg}$

fréquences propres $f_n = \omega_n / 2\pi$ $f_{long} = \begin{bmatrix} 3.348 \\ 21.92 \\ 58.90 \end{bmatrix} Hz$ $f_{transv} = \begin{bmatrix} 4.531 \\ 29.67 \\ 79.72 \end{bmatrix} Hz$

```
% Vecteurs propres (V) et valeurs propres (D)
 [V,D]=eig(K,M)
%
% Normalisation des vecteurs propres
% Matrice des max des vecteurs propres (phimax)
phimax=(max(abs(V))'*diag(eye(3))')';
%
% Matrice des vecteurs propres normalises (phi)
phi=V./phimax
%
% Frequences propres
frequ=diag(sqrt(D)/2/pi)
%
```

---

4. **Grandeurs généralisées**

masses généralisées $\underline{M}^* = \underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} 522847 & 0 & 0 \\ 0 & 859393 & 0 \\ 0 & 0 & 613955 \end{bmatrix} kg$

remarque : les masses généralisées sont bien égales à $m_n^* = \sum A_{jn}^2 \cdot m_j$

rigidité généralisée $$\underline{K}^* = \underline{A}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{A} = \frac{6 \cdot 26 \cdot 10^9 \cdot I}{2.8^3} \cdot \begin{bmatrix} 0.0186 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3134 & 0 \\ 0 & 0 & 6.7733 \end{bmatrix}$$

```
% Matrice des masses generalisees (Mgen)
Mgen=((phi)'*M*phi);
%
% Matrice de la rigidite generalisee (Kgen)
Kgen=(phi)'*K*phi;
%
```

---

5. **Facteurs de participation**

facteurs de participation $$\underline{r} = \underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_x = \begin{bmatrix} 675228 \\ 471364 \\ -206483 \end{bmatrix} kg$$

remarque : les facteurs de participation sont bien égaux à $r_n = \sum A_{jn} \cdot m_j$

facteurs de participation modaux $$\frac{r_n}{m_n^*} = \begin{bmatrix} 1.2914 \\ 0.5485 \\ -0.3363 \end{bmatrix}$$

```
% Vecteur des facteurs de participation (r et rSm)
r=(phi)'*M*diag(eye(3))
rSm=r./diag(Mgen)
%
```

---

6. **Masses modales**

masses modales : $$m_{\mathrm{mod},n} = \left(\frac{r_n}{m_n^*}\right)^2 \cdot m_n^*$$

1er mode $m_{mod,1}$= $1.2914^2 \times 522847 = 872 \times 10^3\ kg$

2ème mode $m_{mod,2}$= $0.5485^2 \times 859393 = 259 \times 10^3\ kg$

3ème mode $m_{mod,3}$= $-0.3363^2 \times 613955 = 69 \times 10^3\ kg$

remarque : la somme des masses modales est bien égale à $m_{tot} = \sum m_{\mathrm{mod},j}$

```
% Masses modales (MasseMod)
MasseMod=(diag(Mgen).*rSm.^2)
```

7. **Réponse maximale (sens longitudinal)**

Pour tenir compte de la perte de rigidité due à la fissuration, on considère une rigidité effective correspondant à 30% de l'état non fissuré.

périodes propres	T_1	=	$1/f_{long,1} / \sqrt{0.3} = 0.545$ s.
	T_2	=	$1/f_{long,2} / \sqrt{0.3} = 0.083$ s.
	T_3	=	$1/f_{long,3} / \sqrt{0.3} = 0.031$ s.

```
% Périodes propres reduites (T)
T=1./frequ/sqrt(0.3)
```

Spectre de réponse

zone Z3b:	a_{gd}	=	1.6 m/s²
Classe de terrain	S	=	1.15
de fondation C :	T_B	=	0.2 s.
	T_C	=	0.6 s.
	T_D	=	2.0 s.

Accélération spectrale

1er mode $S_{e,1}$ = $2.5 \times 1.6 \times 1.15 \times 1 = 4.60\ m/s^2$

2ème mode $S_{e,2}$ = $1.6 \times 1.15 \times \left(1 + 1.5 \times 0.083/0.2\right) = 2.99\ m/s^2$

3ème mode $S_{e,3}$ = $1.6 \times 1.15 \times \left(1 + 1.5 \times 0.031/0.2\right) = 2.27\ m/s^2$

Réponses modales maximales

1er mode $z_{1,max}$ = $\dfrac{|r_1|}{m_1^* \times \omega_1^2} \times S_{e,1} = \dfrac{|r_1| \times T_1^2}{m_1^* \times (2\pi)^2} \times S_{e,1} = \dfrac{1.2914 \times 0.545^2}{(2\pi)^2} \times 4.6 = 0.0447\ m$

2ème mode $z_{2,max}$ = $\dfrac{|r_2| \times T_2^2}{m_2^* \times (2\pi)^2} \times S_{e,2} = \dfrac{0.5485 \times 0.083^2}{(2\pi)^2} \times 2.99 = 2.9 \times 10^{-4}\ m$

3ème mode $z_{3,max}$ = $\dfrac{|r_3| \times T_3^2}{m_3^* \times (2\pi)^2} \times S_{e,3} = \dfrac{0.3363 \times 0.031^2}{(2\pi)^2} \times 2.27 = 1.9 \times 10^{-5}\ m$

Déplacements d'étage maximaux de chaque mode

1er mode $\underline{x}_{1,max} = \underline{A}_1 \cdot z_{1,max} = \begin{bmatrix} 0.1564 \\ 0.5316 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \cdot 0.0447 = \begin{bmatrix} 0.0070 \\ 0.0238 \\ 0.0447 \end{bmatrix} m$

2ème mode $\underline{x}_{2,max} = \underline{A}_2 \cdot z_{2,max} = \begin{bmatrix} 0.8417 \\ 1.0000 \\ -0.6633 \end{bmatrix} \cdot 2.9 \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} 2.441 \\ 2.900 \\ -1.924 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}\ m$

3ème mode $\underline{x}_{3,max} = \underline{A}_3 \cdot z_{3,max} = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ 0.6990 \\ -0.2152 \end{bmatrix} \cdot 1.9 \cdot 10^{-5} = \begin{bmatrix} -1.900 \\ 1.328 \\ -0.409 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}\ m$

Forces d'étage maximales de chaque mode

1er mode $\underline{F}_{1,max} = 0.3 \cdot \underline{K} \cdot x_{1,max} = 0.3 \cdot 1.2415 \cdot 10^{10} \cdot \begin{bmatrix} 3.0769 & -1.7692 & 0.4615 \\ -1.7692 & 1.6923 & -0.6154 \\ 0.4615 & -0.6154 & 0.2692 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0070 \\ 0.0238 \\ 0.0447 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0.372 \cdot 10^6\ N \\ 1.263 \cdot 10^6\ N \\ 2.376 \cdot 10^6\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 372\,kN \\ 1263\,kN \\ 2376\,kN \end{bmatrix}$

2ème mode $\underline{F}_{2,max} = 0.3 \cdot \underline{K} \cdot x_{2,max} = 0.3 \cdot \underline{K} \cdot \begin{bmatrix} 2.441 \\ 2.900 \\ -1.924 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0.552 \cdot 10^6\ N \\ 0.656 \cdot 10^6\ N \\ -0.435 \cdot 10^6\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 552\,kN \\ 656\,kN \\ -435\,kN \end{bmatrix}$

3ème mode $\underline{F}_{3,max} = 0.3 \cdot \underline{K} \cdot x_{3,max} = 0.3 \cdot \underline{K} \cdot \begin{bmatrix} -1.900 \\ 1.328 \\ -0.409 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} = \begin{bmatrix} -0.363 \cdot 10^6\ N \\ 0.254 \cdot 10^6\ N \\ -0.078 \cdot 10^6\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -363\,kN \\ 254\,kN \\ -78\,kN \end{bmatrix}$

8. **Superposition SRSS**

1er étage $F_{1,max,tot} = \sqrt{372^2 + 552^2 + 363^2} = 758.3\,kN$

2ème étage $F_{2,max,tot} = \sqrt{1263^2 + 656^2 + 254^2} = 1446\,kN$

3ème étage $F_{3,max,tot} = \sqrt{2376^2 + 435^2 + 78^2} = 2417\,kN$

9. **Méthode des forces de remplacement**

force de rempl. $F_d = S_{e,1} \cdot M_{tot} = 4.60 \cdot 1200 \cdot 10^3 = 5520 \cdot 10^3$ N = 5520 kN

répartition lin.
$F_{d1} = 1/6 \cdot F_d = 1/6 \cdot 5520 = 920$ kN
$F_{d2} = 2/6 \cdot F_d = 1/3 \cdot 5520 = 1840$ kN
$F_{d3} = 3/6 \cdot F_d = 1/2 \cdot 5520 = 2760$ kN

```
% valeurs spectrales : Se
%
% matrice de multiplication des forces modales: rSd=(r/m*)*Se
Se=[4.6 2.99 2.7] ;
rSd=eye(3);
for I=1:3,
   rSd(I,I)=abs(rSm(I))/(2*pi*frequ(I)*sqrt(0.3))^2*Se(I);
end
%
% deplacements max modaux
Xmod= phi*rSd;
%
% forces modales
Fmod=03*K*phi*rSd;
%
% superposition selon la regle de la racine de la somme des carres (SRSS)
%
% superposition des deplacements: Xsrss
Xsrss=sqrt(sum((Xmod.*Xmod)'));
%
% superposition des forces: Fsrss
Fsrss=sqrt(sum((Fmod.*Fmod)'));
%
```
