Corrigé de la série d'exercices N°13

1. Les vecteurs propres possèdent des propriétés d'orthogonalité. Pas directement entre eux, mais par rapport à la matrice de rigidité (K) et à la matrice des masse (M):

$$\left[A_1^T\right]\cdot\left[K\right]\cdot\left[A_2\right]=0$$

$$\begin{bmatrix}0.486 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\cdot10^5 & -2\cdot10^5\\ -2\cdot10^5 & 2\cdot10^5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ -0.417\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43\cdot10^3 & 102.8\cdot10^3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ -0.417\end{bmatrix}\simeq 0$$

$$\left[A_1^T\right]\cdot\left[M\right]\cdot\left[A_2\right]=0$$

$$\begin{bmatrix}0.486 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6000 & 0\\ 0 & 7000\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ -0.417\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.914\cdot10^3 & 7\cdot10^3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ -0.417\end{bmatrix}\simeq 0$$

2. Le vecteur des facteurs de participation ($\underline{r}$) est donné par l'expression suivante :

$$\underline{r}=\underline{A}^T\,\underline{M}\,\underline{e}_x=\begin{bmatrix}0.486 & 1\\ 1 & -0.417\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}6000 & 0\\ 0 & 7000\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.91\cdot10^3\\ 3.09\cdot10^3\end{bmatrix}$$

3. Calcul de la matrice des masses généralisées :

$$\underline{M}^*=\underline{A}^T\,\underline{M}\,\underline{A}=\begin{bmatrix}8415.1 & 0\\ 0 & 7212.9\end{bmatrix}$$

Les facteurs de participation modaux sont donnés par :

$$\frac{r_1}{m_1^*}=\frac{9.91\cdot10^3}{8415.1}=1.178 \quad ; \quad \frac{r_2}{m_2^*}=\frac{3.09\cdot10^3}{7212.9}=0.428$$

4. Les masses modales ($m_{mod,n}$) sont alors données par :

$$m_{\text{mod},1}=\left(\frac{r_1}{m_1^*}\right)^2.m_1^*=\left(1.178\right)^2.8415.1=11678\,kg$$

$$m_{\text{mod},2}=\left(\frac{r_2}{m_2^*}\right)^2.m_2^*=\left(0.428\right)^2.7212.9=1321.3\,kg$$

On remarque que sauf erreur d'arrondissement, la somme des deux masses modales vaut effectivement la somme des masses d'étage (13000 kg).

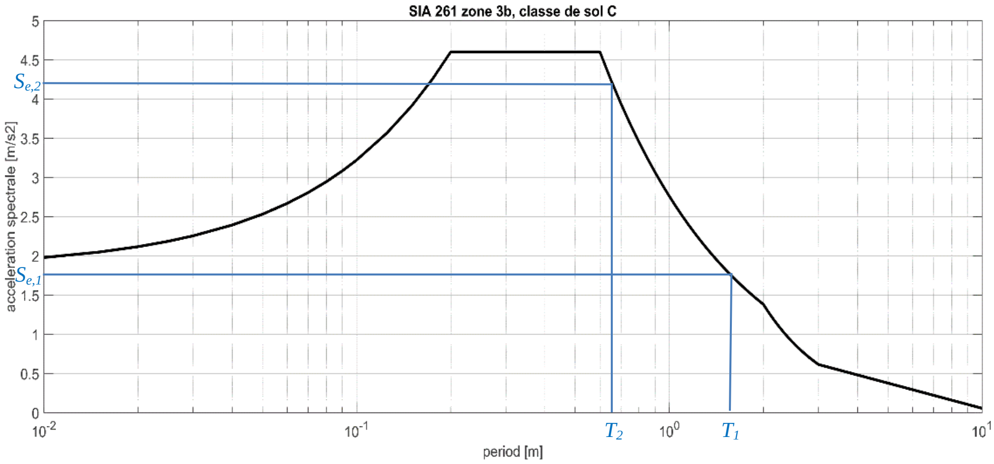
5. A) En considérant les pulsations propres du cadre, on obtienne les périodes propres suivants :

$$\omega=\begin{bmatrix}3.83\\ 9.86\end{bmatrix}rad/s \qquad T=\begin{bmatrix}1.64\\ 0.64\end{bmatrix}s$$

La réponse modale maximale est donnée par :

$$z_{n,\max} = \frac{|r_n|}{m_n^*} \cdot S_{u,n} = \frac{|r_n|}{\omega_n^2 \cdot m_n^*} \cdot S_{e,n}$$

On cherche sur le spectre, les valeurs de $S_{e,1}(T_1)$ et $S_{e,2}(T_2)$:



$$S_{e,1} \simeq 1.80\, m/s^2 \qquad S_{e,2} \simeq 4.20\; m/s^2$$

$$z_{1,\max} = \frac{|r_1|}{\omega_1^2 \cdot m_1^*} \cdot S_{e,1} = 0.144\ m \qquad z_{2,\max} = \frac{|r_2|}{\omega_2^2 \cdot m_2^*} \cdot S_{e,2} = 0.019\ m$$

$$\underline{z}_{\max} = \begin{bmatrix} 0.144 \\ 0.019 \end{bmatrix} m$$

A partir des réponses modales maximales, on obtienne les efforts maximaux dans chaque mode :

$$\begin{bmatrix} F_{11,\max} \\ F_{21,\max} \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \underline{A}_1 \cdot z_{1,\max} = \begin{bmatrix} 5\cdot 10^5 & -2\cdot 10^5 \\ -2\cdot 10^5 & 2\cdot 10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.486 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0.144 = \begin{bmatrix} 6.17 \\ 14.81 \end{bmatrix} kN$$

$$\begin{bmatrix} F_{12,\max} \\ F_{22,\max} \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \underline{A}_2 \cdot z_{2,\max} = \begin{bmatrix} 5\cdot 10^5 & -2\cdot 10^5 \\ -2\cdot 10^5 & 2\cdot 10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0.417 \end{bmatrix} \cdot 0.019 = \begin{bmatrix} 11.08 \\ -5.38 \end{bmatrix} kN$$

Les efforts tranchant valent :

$$\begin{bmatrix} V_{11,\max} \\ V_{21,\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.98 \\ 14.81 \end{bmatrix} kN \qquad \begin{bmatrix} V_{12,\max} \\ V_{22,\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.70 \\ -5.38 \end{bmatrix} kN$$

Afin d'évaluer les efforts maxima, il faut superposer les efforts selon la règle SRSS :

$$F_{j,\max,tot} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|F_{jn,\max}\right|^2}$$

$$F_{1,\max,tot} = \sqrt{6.17^2 + 11.08^2} = 12.68\ kN \qquad F_{2,\max,tot} = \sqrt{14.81^2 + 5.38^2} = 15.76\ kN$$

$$V_{j,\max,tot} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|V_{jn,\max}\right|^2}$$

$$V_{1,\max,tot} = \sqrt{20.98^2 + 5.70^2} = 21.74\ kN \qquad V_{2,\max,tot} = \sqrt{14.81^2 + 5.38^2} = 15.76\ kN$$

$$\underline{F}_{\max} = \begin{bmatrix} 12.68 \\ 15.76 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{V}_{\max} = \begin{bmatrix} 21.74 \\ 15.76 \end{bmatrix} kN$$

6. Résolution avec la méthode des forces de remplacement

$$F_d = S_e \cdot M_{tot} = S_e(T_1) \cdot \sum_j m_j$$

$$F_d = 1.80 \cdot (6000 + 7000) = 23.40\,kN$$

$$F_{di} = \frac{z_i \cdot m_i}{\sum_j z_j \cdot m_j} \cdot F_d$$

$$F_{d1} = \frac{4 \cdot 6000}{4 \cdot 6000 + 8 \cdot 7000} \cdot 23.40 = 7.02\,kN$$

$$F_{d1} = \frac{8 \cdot 7000}{4 \cdot 6000 + 8 \cdot 7000} \cdot 23.40 = 16.38 kN$$

$$V_d = \begin{bmatrix} 23.40 \\ 16.38 \end{bmatrix}$$

Entre les deux méthodes il y a une différence par rapport à l'effort tranchant à la base:

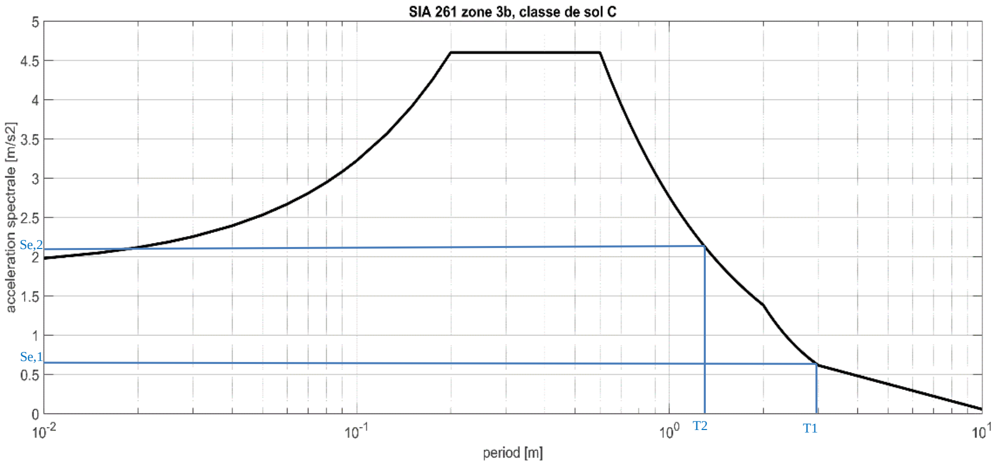
$$\frac{V_{\max,1}}{V_{d,1}} = \frac{21.74}{23.40} = 0.93$$

EN PLUS :

5.1) Pour des calculs plus corrects, il faut prendre en compte l'effet engendré par la fissuration sur la structure. La rigidité effective correspondra au 30% de l'état non fissuré.

$$\omega = \begin{bmatrix} 2.10 \\ 5.40 \end{bmatrix} rad/s \quad T = \begin{bmatrix} 2.99 \\ 1.16 \end{bmatrix} s$$

$$z_{n,\max} = \frac{|r_n|}{m_n^*} \cdot S_{u,n} = \frac{|r_n|}{\omega_n^2 \cdot m_n^*} \cdot S_{e,n}$$



$$S_{e,1} \simeq 0.65\, m/s^2 \qquad S_{e,2} \simeq 2.10\ m/s^2$$

$$z_{1,\max} = \frac{|r_1|}{\omega_1^2 \cdot m_1^*} \cdot S_{e,1} = 0.174\ m \qquad z_{2,\max} = \frac{|r_2|}{\omega_2^2 \cdot m_2^*} \cdot S_{e,2} = 0.031\, m$$

$$\underline{z}_{\max} = \begin{bmatrix} 0.174 \\ 0.031 \end{bmatrix} m$$

$$\begin{bmatrix} F_{11,\max} \\ F_{21,\max} \end{bmatrix} = 0.3 \cdot \underline{K} \cdot \underline{A}_1 \cdot z_{1,\max} = \begin{bmatrix} 1.5 \cdot 10^5 & -0.6 \cdot 10^5 \\ -0.6 \cdot 10^5 & 0.6 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.486 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0.174 = \begin{bmatrix} 2.24 \\ 5.37 \end{bmatrix} kN$$

$$\begin{bmatrix} F_{12,\max} \\ F_{22,\max} \end{bmatrix} = 0.3 \cdot \underline{K} \cdot \underline{A}_2 \cdot z_{2,\max} = \begin{bmatrix} 1.5 \cdot 10^5 & -0.6 \cdot 10^5 \\ -0.6 \cdot 10^5 & 0.6 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0.417 \end{bmatrix} \cdot 0.031 = \begin{bmatrix} 5.42 \\ -2.63 \end{bmatrix} kN$$

$$\begin{bmatrix} V_{11,\max} \\ V_{21,\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.61 \\ 5.37 \end{bmatrix} kN \qquad \begin{bmatrix} V_{12,\max} \\ V_{22,\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.79 \\ -2.63 \end{bmatrix} kN$$

$$F_{j,\max,tot} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left| F_{jn,\max} \right|^2}$$

$$F_{1,\max,tot} = \sqrt{2.24^2 + 5.42^2} = 5.86\ kN \qquad F_{2,\max,tot} = \sqrt{5.37^2 + 2.63^2} = 5.98\ kN$$

$$V_{j,\max,tot} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left| V_{jn,\max} \right|^2}$$

$$V_{1,\max,tot} = \sqrt{7.61^2 + 2.79^2} = 8.11\ kN \qquad V_{2,\max,tot} = \sqrt{23.62^2 + 76.44^2} = 5.98\ kN$$

$$\underline{F}_{\max} = \begin{bmatrix} 5.86 \\ 5.98 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{V}_{\max} = \begin{bmatrix} 8.11 \\ 5.98 \end{bmatrix} kN$$

6.1) Résolution avec la méthode des forces de remplacement

$$F_d = S_e \cdot M_{tot} = S_e(T_1) \cdot \sum_j m_j$$

$$F_d = 0.65 \cdot (6000 + 7000) = 8.45 kN$$

$$F_{di} = \frac{z_i \cdot m_i}{\sum_j z_j \cdot m_j} \cdot F_d = S_e(T_1) \cdot \sum_j m_j$$

$$F_{d1} = \frac{4 \cdot 6000}{4 \cdot 6000 + 8 \cdot 7000} \cdot 8.45 = 2.53 kN$$

$$F_{d1} = \frac{8 \cdot 7000}{4 \cdot 6000 + 8 \cdot 7000} \cdot 8.45 = 5.92 kN$$

$$V_d = \begin{bmatrix} 8.45 \\ 5.92 \end{bmatrix}$$

Entre les deux méthodes il y a une différence par rapport à l'effort tranchant à la base:

$$\frac{V_{\max,1}}{V_{d,1}} = \frac{8.11}{8.45} = 0.96$$