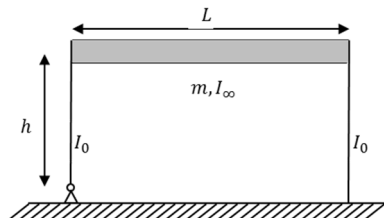
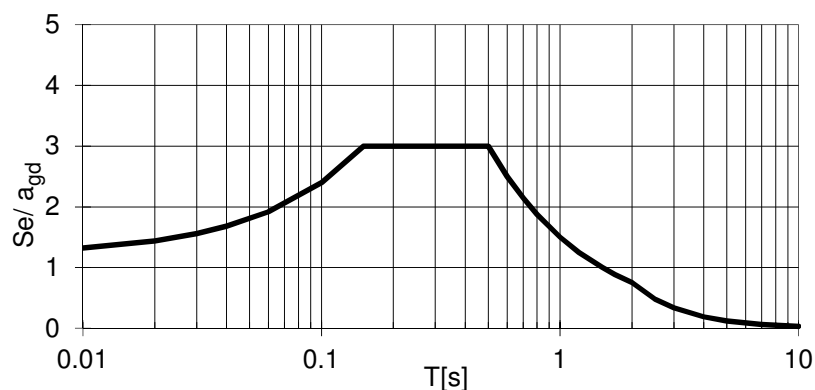


Corrigé de la série d'exercices N°12**Exercice 1**

Données :

$E = 210\,000\text{ MPa}$; $I_0 = 11.26 \cdot 10^6\text{ mm}^4$; $m = 5000\text{ kg}$; $h = 5\text{ m}$; $L = 10\text{ m}$; $\zeta = 5\%$; S_e : accélération horizontale ; $a_{gd} = 1.0\text{ m/s}^2$



1. On utilise la méthode des forces de remplacement :

$$K_{eq} = 3 \frac{EI_0}{h^3} + 12 \frac{EI_0}{h^3} = 15 \frac{EI_0}{h^3} = 283.75 \frac{KN}{m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = 7.53 \frac{rad}{s} \rightarrow T = 0.83\text{ s}$$

En utilisant le spectre :

$$\frac{S_e}{a_{gd}} \cong 1.8$$

La force horizontale :

$$F = m S_e = 5000 \cdot 1.8 \cdot 1.0 = 9\text{ kN}$$

Les réactions d'appuis horizontales se répartissent pour 20% à gauche et 80% à droite selon tableau des systèmes statiques de bases :

$$R_{gauche} = V_{gauche} = 0.2F = 1.8\text{ kN} ; R_{droite} = V_{droite} = 0.8F = 7.2\text{ kN}$$

$$\text{Moments aux angles de cadre: } M_{gauche} = R_{gauche} h = 1.8 \cdot 5 = 9\text{ kNm}$$

$$M_{droite} = -\frac{0.8Fh}{2} + R_{droite} h = -7.2 \cdot \frac{5}{2} + 7.2 \cdot 5 = 18\text{ kNm}$$

$$\text{Déplacement maximal: } x_{max} = \frac{F}{K_{eq}} = 3.17\text{ cm}$$

- 2 La rigidité est doublée

$$K_{eq}' = 2K_{eq} = 567.5 \frac{KN}{m} \rightarrow T = 0.59\text{ s} \rightarrow \frac{S_e}{a_{gd}} = 2.5$$

La force horizontale :

$$F = m S_e = 5000 \cdot 2.5 \cdot 1.0 = 12.5\text{ kN}$$

Déplacement maximal:

$$x_{max} = \frac{F}{K_{eq}} = 2.20 \text{ cm}$$

$$x'_{max} = x_{max} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M'_{eff} = M_{eff} \cdot \sqrt{2}$$

Avec une valeur double de la rigidité, la pulsation propre ω'_n est plus grande que la pulsation ω_n d'un facteur $\sqrt{2}$. Cela veut dire que la période T' sera égale à $\frac{T}{\sqrt{2}}$.

Pour la détermination de la force sismique sur le spectre, on est sur la branche descendante en $\dots \frac{1}{T}$. Par conséquent la nouvelle force sismique (avec la période T') sera $F' = F \cdot \sqrt{2}$.

Les efforts seront donc augmentés d'un facteur $\sqrt{2}$ et le déplacement maximal réduit d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

1. Matrices de rigidité et des masses :

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} k$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} m$$

✓ **Fréquences propres et modes propres**

Valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 3k - 2mw^2 & -2k \\ -2k & 2k - 3mw^2 \end{vmatrix} = (3k - 2mw^2)(2k - 3mw^2) - 4k^2 = 6m^2\omega^4 - 13mk\omega^2 + 2k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{12} \cdot \frac{k}{m}$$

On obtient les pulsations propres suivantes :

$$\omega_1^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{k}{m} \text{ et } \omega_2^2 = 2 \cdot \frac{k}{m}$$

Modes propres :

$$\begin{bmatrix} 3k - 2m\omega_1^2 & -2k \\ -2k & 2k - 3m\omega_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 & -2 \\ -2 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot k \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3k - 2m\omega_2^2 & -2k \\ -2k & 2k - 3m\omega_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot k \cdot \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice des vecteurs modaux : } \underline{A} = \begin{bmatrix} 3/4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ **Grandeurs généralisées**

$$\text{Masses généralisées : } \underline{M}^* = \underline{A}^T \underline{M} \underline{A} = \begin{bmatrix} 4.125 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} m$$

Remarque : les masses généralisées sont bien égales à : $m_n^* = \sum A_{jn}^2 \cdot m_j$

Rigidité généralisée : $\underline{K}^* = \underline{A}^T \underline{K} \underline{A} = \begin{bmatrix} 0.6875 & 0 \\ 0 & 22 \end{bmatrix} k$

2. Modification de ces caractéristiques si les hauteurs d'étage sont doublées :

Seules les fréquences ($1/\sqrt{8}$) et la rigidité généralisée ($1/8$) sont affectées. Les vecteurs propres, les masses généralisées, les facteurs de participations et les facteurs de participation modaux restent les mêmes.