<u>Corrigé de la série d'exercices N°11</u>

Exercice 1

a) Matrice des masses :

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1600 & 0 \\ 0 & 800 \end{bmatrix} t$$

Matrice de rigidité : $\underline{K} = \dfrac{6 \cdot 5,67 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 3^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.88 & -0.9 \\ -0.9 & 0.36 \end{bmatrix} .10^{10}\ N\ /\ m$

b) Afin de déterminer les vecteurs propres, il faut résoudre l'équation $\left(\underline{K} - \omega_{n,i}{}^2 \underline{M}\right) \underline{A}_i = 0$ pour chaque pulsation propre.

Les pulsations propres s'obtiennent en calculant le déterminant suivant :

$$\det(\underline{K} - w_n^2 \underline{M}) = \det \left\| \begin{bmatrix} 2880.10^7 - w_n^2 \cdot 1600.10^3 & -900.10^7 \\ -900.10^7 & 360.10^7 - w_n^2 \cdot 800.10^3 \end{bmatrix} \right\|$$

On obtient ainsi :

$w_{n,1} = 28,58 \dfrac{rad}{s}$ et $w_{n,2} = 147,25 \dfrac{rad}{s}$

Calcul du premier vecteur propre :

$$\left[\underline{K} - \omega_{n,1}{}^2 \underline{M}\right] \cdot \left[A_{n1}\right] = 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 27,493 & -9 \\ -9 & 2,946 \end{bmatrix} \cdot \left[A_{n1}\right]$$

On choisit de normaliser la déformée modale du niveau 2 : $A_{21} = 1$

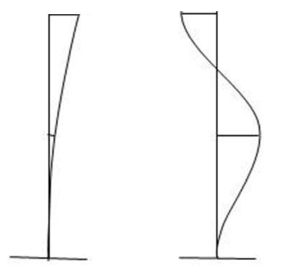
Puis, on détermine la déformée modale du niveau 1 :

$27,493\ A_{11} - 9 = 0 \rightarrow A_{11} = 0,3273$

$\underline{A_1}^T = \left[0,3273 \quad 1\right]$

En utilisant ce procédé pour le second vecteur propre, on trouve $\underline{A}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0,33 & 1 \\ 1 & -0,65 \end{bmatrix}$$



1er mode   2nd mode

c) Matrice de masse généralisée : $\underline{M}^* = \underline{A}^T \underline{M}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 971,46 & 0 \\ 0 & 1262 \end{bmatrix} t$

Matrice de rigidité généralisée : $\underline{K}^* = \underline{A}^T \underline{K}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 793,9 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 42,128 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \dfrac{kN}{m}$

d) Soit $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, l'amplitude de la déformée se calcule comme suit :

$$z_1(0) = \frac{\underline{a}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}}{\underline{a}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{a}_1} = \frac{\begin{bmatrix} 0,33 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1600 & 0 \\ 0 & 800 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,33 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1600 & 0 \\ 0 & 800 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,33 \\ 1 \end{bmatrix}} = 2,19$$

$$z_2(0) = \frac{\underline{a}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x}}{\underline{a}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{a}_2} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -0,65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1600 & 0 \\ 0 & 800 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -0,65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1600 & 0 \\ 0 & 800 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0,65 \end{bmatrix}} = 0,28$$

e) Soit $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et les conditions initiales $\dot{z}_1(0) = 0$ et $\dot{z}_2(0) = 5$.

La réponse de la structure est donnée par :

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(a_{in} \left(z_n(0) \cos w_n t + \frac{\dot{z}_n(0)}{w_n} \sin w_n t \right) \right) \qquad \text{Ici i = 1,2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,33 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2,19 \cdot \cos 28,58t + \begin{bmatrix} 1 \\ -0,65 \end{bmatrix} \cdot \left(0,28 \cdot \cos 147,25t + \frac{5}{147,25} \cdot \sin 147,25t \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0,72 \\ 2,19 \end{bmatrix} \cos 28,58t + \begin{bmatrix} 0,28 \\ -0,182 \end{bmatrix} \cos 147,25t + \begin{bmatrix} 0,034 \\ -0,022 \end{bmatrix} \cdot \sin 147,25t$$

Exercice 2

1. Détermination des caractéristiques généralisées de la structure :

Matrice de masse généralisée : $\underline{M}^* = \underline{A}^T \underline{M}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 12587 & 0 \\ 0 & 15733 \end{bmatrix} kg$

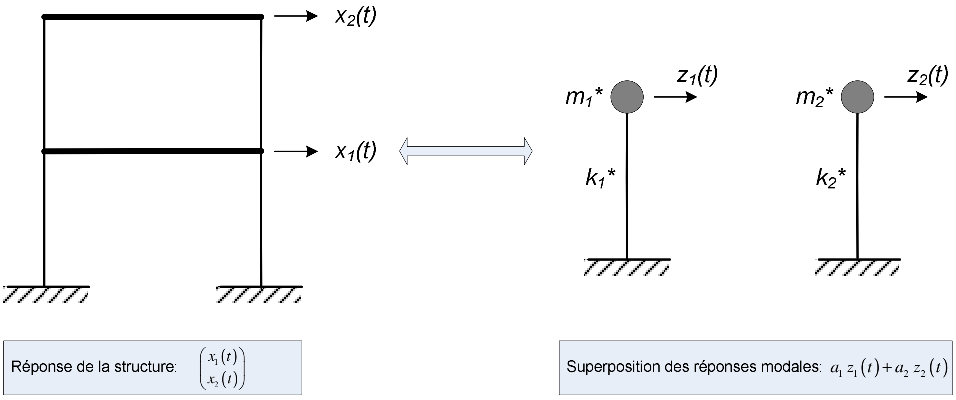
Matrice de rigidité généralisée : $\underline{K}^* = \underline{A}^T \underline{K}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 1.193 & 0 \\ 0 & 16.602 \end{bmatrix} 10^5\ N/m$

La réponse de la structure s'obtient en superposant les réponses modales comme suit :

$$x(t) = \underline{A}\ z(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a_1\, z_1(t) + a_2\, z_2(t) \quad ; \quad avec \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.31 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} -1.64 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les réponses modales $z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont déterminées en considérant les systèmes modaux conformément à la figure ci-dessous :



✓ Détermination de la réponse modale $z_1(t)$ **:**

La première réponse modale est la solution de l'équation suivante : $m_1^* \ddot{z}_1(t) + k_1^*\, z_1(t) = 0$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$z_1(0) = \frac{a_1^T \underline{M}\, x(0)}{a_1^T \underline{M}\, a_1} = 1.56\, m \quad \text{et} \quad \dot{z}_1(0) = \frac{a_1^T \underline{M}\, \dot{x}(0)}{a_1^T \underline{M}\, a_1} = 0$$

La solution s'écrit: $z_1(t) = z_1(0)\cos(\omega_1 t) + \dfrac{\dot{z}_1(0)}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)$

Ce qui donne : $z_1(t) = 1.56\cos(3.08t)$

✓ Détermination de la réponse modale $z_2(t)$ **:**

La deuxième réponse modale est la solution de l'équation suivante : $m_2^* \ddot{z}_2(t) + k_2^*\, z_2(t) = 0$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$z_2(0) = \frac{a_2^T \underline{M}\, x(0)}{a_2^T \underline{M}\, a_2} = 0.95 m \quad \text{et} \quad \dot{z}_2(0) = \frac{a_2^T \underline{M}\, \dot{x}(0)}{a_2^T \underline{M}\, a_2} = 0$$

La solution s'écrit: $z_2(t) = z_2(0)\cos(\omega_2 t) + \dfrac{\dot{z}_2(0)}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)$

Ce qui donne : $z_2(t) = 0.95\cos(10.27t)$

✓ La réponse de la structure s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.31 \end{pmatrix} z_1(t) + \begin{pmatrix} -1.64 \\ 1 \end{pmatrix} z_2(t) = \begin{pmatrix} 1.56\cos(3.08t) - 1.558\cos(10.27t) \\ 2.04\cos(3.08t) - 0.95\cos(10.27t) \end{pmatrix}$$

2. Détermination de la réponse de la structure à une force d'excitation

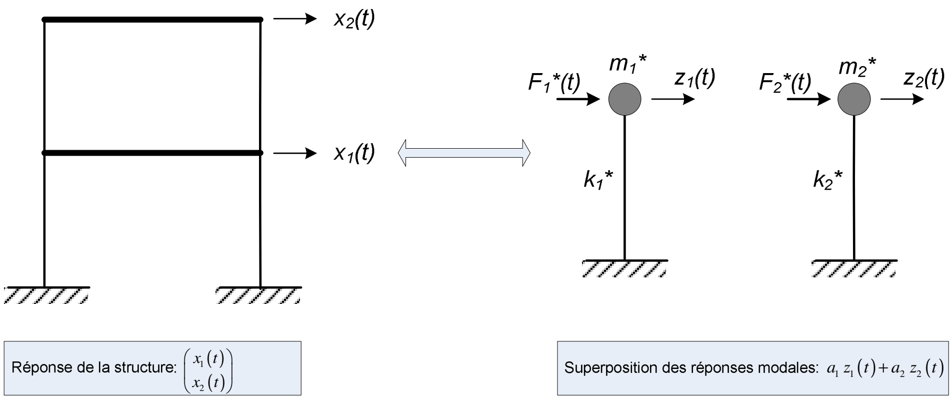
Comme pour le premier cas, la réponse de la structure s'obtient en superposant les réponses modales comme suit :

$$x(t) = \underline{A}\, z(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a_1\, z_1(t) + a_2\, z_2(t) \quad ; \quad avec \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.31 \end{pmatrix} ; a_2 = \begin{pmatrix} -1.64 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les réponses modales $z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont déterminées en considérant les systèmes modaux qui sont maintenant soumis à des forces d'excitation $F_1^*(t)$ et $F_2^*(t)$ déterminé par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} F_1^*(t) \\ F_2^*(t) \end{pmatrix} = \underline{A}^T \begin{pmatrix} F_1\ (t) \\ F_2\ (t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.31 \\ -1.64 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.31\, F_0 \sin(\omega t) \\ F_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$



✓ Détermination de la réponse modale $z_1(t)$ **:**

La première réponse modale est la solution de l'équation suivante : $m_1^* \ddot{z}_1(t) + k_1^*\, z_1(t) = F_1^*(t)$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$z_1(0) = \frac{a_1^T \underline{M}\, x(0)}{a_1^T \underline{M}\, a_1} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{z}_1(0) = \frac{a_1^T \underline{M}\, \dot{x}(0)}{a_1^T \underline{M}\, a_1} = 0$$

La forme générale de la solution s'écrit : $z_1(t) = \dfrac{\left\| F_1^* \right\| / k_1^*}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_1)^2\right)^2}} \sin(\omega t)$

Ce qui donne : $z_1(t) = 0.024 \sin(15t)$

✓ Détermination de la réponse modale $z_2(t)$ **:**

La deuxième réponse modale est la solution de l'équation suivante : $m_2^* \ddot{z}_2(t) + k_2^*\, z_2(t) = F_2^*(t)$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$z_2(0) = \frac{a_2^T \underline{M}\, x(0)}{a_2^T \underline{M}\, a_2} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{z}_2(0) = \frac{a_2^T \underline{M}\, \dot{x}(0)}{a_2^T \underline{M}\, a_2} = 0$$

La solution s'écrit: $z_2(t) = \dfrac{\left\|F_2^*\right\| / k_2^*}{\sqrt{\left(1-(\omega/\omega_2)^2\right)^2}} \sin(\omega t)$

Ce qui donne : $z_2(t) = 0.026 \sin(15t)$

✓ La réponse de la structure s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.31 \end{pmatrix} z_1(t) + \begin{pmatrix} -1.64 \\ 1 \end{pmatrix} z_2(t) = \begin{pmatrix} -0.019 \sin(15t) \\ 0.057 \sin(15t) \end{pmatrix}$$