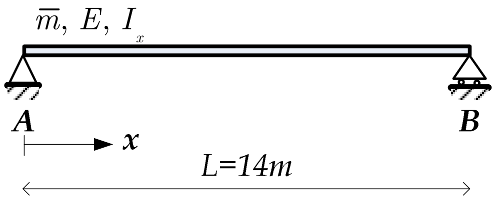
Corrigé de la série d'exercices N°09

Exercice 1



Choix de la forme de la déformée approximant le premier mode et qui satisfait les conditions de bord :

$$\psi(x) = -\sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Avec :

$$\psi'(x) = -\frac{\pi}{L}\cos\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\psi''(x) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Rappel : $\int_0^L \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}$

Données : $\overline{m}$ =6 t/m ; L=14 m ; I_x=40.5*10^4 cm^4 ; M=20 t ;
h=1 m ; E=21*10^6 kN/m^2

1. Fréquence propre de l'ouvrage

$$k^* = \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx = \frac{EI\pi^4}{L^4}\int_0^L \sin^2\left(\pi\frac{x}{L}\right)dx = \frac{EI\pi^4}{2L^3} \cong 1.5\cdot 10^3\,\frac{kN}{m}$$

$$m^* = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx = \overline{m}\int_0^L \sin^2\left(\pi\frac{x}{L}\right)dx = \frac{\overline{m}L}{2} \cong 42t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \cong 6rad/s$$

2. Fréquence propre de l'ouvrage modifié

$$k^* = 1.5\cdot 10^3\,\frac{kN}{m}$$

$$m^* = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx + M[\psi(x = L/2)]^2 = \frac{\overline{m}L}{2} + M \cong 62t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \cong 4.9rad/s$$

3. Force statique équivalente

Choc mou : $F_{choc} = \omega_n m_1 v_1 = 4.9\cdot 3\cdot\sqrt{2\cdot 9.81\cdot 1} \cong 65kN$
Force due au camion : $F_c = (M - m_1)g = (20-3)\cdot 9.81 \cong 167kN$

Force statique équivalente : $F_{max} = F_{choc} + F_c = 65 + 167 = 232kN$

4. Ressort sur appui gauche

On suppose que la forme de la déformée reste la même $\psi(x) = -\sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$. Pour le calcul de k^*, il faut en plus considérer le travail virtuel du ressort.

$$\frac{\delta w_{ressort}}{dz} = K[\psi'(x=0)]^2 = \frac{\pi^2}{L^2}K$$

Où $\psi'(x=0)$ est la rotation interne du ressort. Ainsi :

$$k^* = \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx + \frac{\delta w_{ressort}}{dz} = \frac{EI\pi^4}{2L^3} + \frac{\pi^2}{L^2}K \cong 2.0 \cdot 10^3 \frac{kN}{m}$$

$$m^* = 42t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \cong 6.9 rad/s$$

En réalité, l'approximation de la déformée par la fonction sinusoïdale n'est pas valable pour des rigidités plus grandes. Deux méthodes sont possibles pour obtenir une meilleure approximation.

Méthode 1 :

1) Déterminer la déformée sous une charge répartie q (par exemple : poids propre) :
$$\psi(x) = -\frac{q(L-x)x[KL(3L-2x)x + 6EI(L^2 + Lx - x^2)]}{48EI(3EI + KL)}$$
2) Déterminer $\delta w_{flexion}$, $\delta w_{ressort}$ et $\delta w_{inertie}$ et ainsi k^* et m^*.
3) Finalement,
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = 18\sqrt{14}\sqrt{\frac{EI(24E^2I^2 + 11EIKL + K^2L^2)}{\overline{m}L^4(1116E^2I^2 + 285EIKL + 19K^2L^2)}}$$

Méthode 2 :

Si l'équation de la déformée est trop compliquée à obtenir et que l'on dispose d'un programme d'éléments finis :

1) Discrétiser le système en N intervalles. Appliquer $N+1$ forces F_i uniformément répartie sur le système et déterminer la masse par intervalle m_i.
2) Calculer les déplacements d_i au droit des forces F_i avec la méthode des éléments finis.
3) Finalement,
$$\omega_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N+1} F_i d_i}{\sum_{i=1}^{N+1} m_i\, d_i^2}}$$

Plus le nombre d'intervalles augmentent, plus la solution se rapproche la valeur exacte de la pulsation propre (par le haut). Si $N \to \infty$, la solution est égale à celle de la méthode 1.

Voici la solution pour différentes valeurs de K :

K [kNm/rad]	0	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^9
1ère approximation [rad/s]	5.99	6.00	6.09	6.92	12.48	35.14	1095
Méthode 1 ou 2 [rad/s]	5.99	6.00	6.10	6.77	8.53	9.28	9.39

Avec la 1ère approximation (déformée sinusoïdale), la pulsation diverge fortement de l'approximation selon la méthode 1 ou 2 pour $K \geq 10^5$. Il faut donc être prudent sur le choix de la forme de la déformée. La meilleure approximation en cas de doute est la déformée sous charge répartie.

Exercice 2

La réponse u(x, t) de la structure peut être écrite comme :

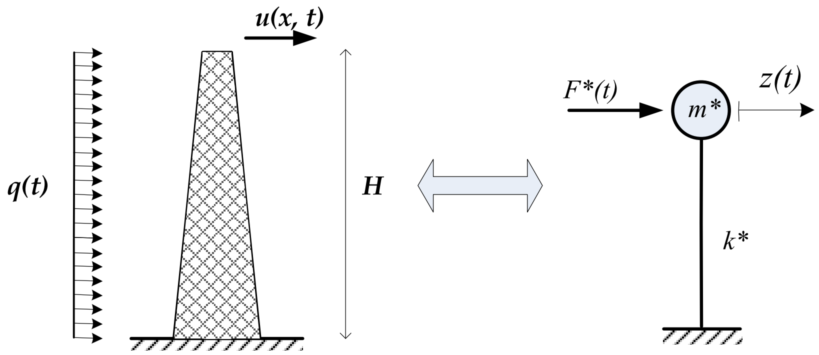
$$u(x,t) = \psi(x)\; z(t)$$

Avec $\psi(x)$ une fonction de forme approximant la déformée du premier mode et qui satisfait les conditions de bord.

On peut choisir une fonction parabolique du type : $\psi(x) = a\,x^2 + c$

Avec les deux conditions de bord : $\psi(x=0) = 0 \quad et \quad \psi(x=H) = 1$

On obtient : $\psi(x) = \dfrac{x^2}{H^2}$



La structure étudiée peut alors être assimilé à un oscillateur simple équivalent dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$k^* = \int_0^H EI(x)[\psi''(x)]^2 dx = \frac{4EI}{H^3} = 1097.4\ kN/m$$

$$m^* = \int_0^H m(x)[\psi(x)]^2 dx = \frac{\bar{m}H}{5} = 2520\ kg$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = 20.86\ rad/s$$

$$F^*(t) = \int_0^H q(x,t)\psi(x) \quad \mathrm{dx} \quad = \frac{q_0 H}{3} \sin \omega t$$

Le système équivalent est un oscillateur simple non amorti soumis à une force d'excitation sinusoïdale. Sa réponse s'écrit donc de la manière suivante :

$$z(t) = \frac{\dfrac{q_0 H}{3k^*}}{\left|1-\omega^2/\omega_n^2\right|} \sin(\omega t) = 0.566 \sin(15t)$$

La correction par rapport à la solution particulière est relativement limitée si les conditions initiales sont nulles même sans amortissement.
Avec une vitesse initiale nulle, la réponse totale s'éloigne assez peu de la réponse à l'équilibre, même sans amortissement (voir figure 2.16 du livre).

La réponse de la structure s'écrit donc :

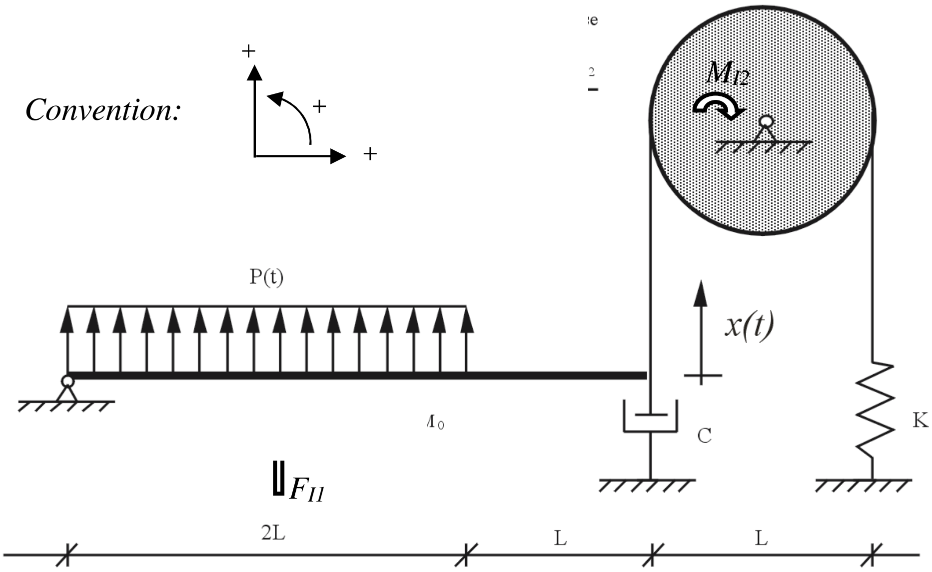
$$u(x,t) = \psi(x)\ \mathrm{z}(t) \ = \ \frac{x^2}{H^2} \cdot \frac{\dfrac{q_0 H}{3k^*}}{\left|1-\omega^2/\omega_n^2\right|} \sin(\omega t) = \frac{\dfrac{q_0}{3Hk^*}}{\left|1-\omega^2/\omega_n^2\right|} x^2 \sin(\omega t)$$

Application numérique :

$$u(x,t) = 1.75^{-3}\, x^2 \sin(15t)$$

Exercice 3

Détermination de l'équation du mouvement



Sous l'effet d'un déplacement x(t), les éléments apportent les contributions suivantes :

Type d'action	Désignation	Valeur de l'effort associé $x(t)$	Incrément du déplacement en fonction de δx	Contribution au travail virtuel
Force due au réssort	F_{S1}	$-Kx$	δx	$-Kx\delta x$
Force due à l'amortisseur	F_{D1}	$-C\dot{x}$	δx	$-C\dot{x}\delta x$
Effets de l'inertie	F_{I1}	$M_0 3L\dfrac{\ddot{x}}{2} = \dfrac{3}{2}M_0 L\ddot{x}$	$\dfrac{\delta x}{2}$	$\dfrac{3}{2}M_0 L\ddot{x}\dfrac{\delta x}{2}$
	M_{I1}	$I_0\ddot{\theta} = M_0 3L\dfrac{(3L)^2}{12}\dfrac{\ddot{x}}{3L} = M_0\dfrac{9L^2}{12}\ddot{x} = \dfrac{3}{4}M_0 L^2\ddot{x}$	$\dfrac{\delta x}{3L}$	$\dfrac{3}{4}M_0 L^2\ddot{x}\dfrac{\delta x}{3L}$
	M_{I2}	$I_0\ddot{\theta} = -M\dfrac{L^2}{8}\dfrac{\ddot{x}}{L/2} = -M\dfrac{L}{4}\ddot{x}$	$-\dfrac{\delta x}{L/2}$	$M\dfrac{L}{4}\ddot{x}\dfrac{2\delta x}{L}$
Force externe	F	$2L\cdot P(t)$	$\dfrac{\delta x}{3}$	$P(t)2L\dfrac{\delta x}{3}$

Travail effectué lors d'un déplacement virtuel compatible avec les liaisons :

$$\delta w_i = \delta w_e$$

$$\frac{3}{2}M_0 L\ddot{x}\frac{\delta x}{2} + \frac{3}{4}M_0 L^2\ddot{x}\frac{\delta x}{3L} + M\frac{L}{4}\ddot{x}\frac{2\delta x}{L} = -Kx\delta x - C\dot{x}\delta x 0 + P(t)2L\frac{\delta x}{3}$$

Equation du mouvement :

$$M_0 L\ddot{x} + \frac{1}{2}M\ddot{x} + Kx + C\dot{x} - P(t)\frac{2}{3}L = 0 \;\;\Rightarrow\;\; (M_0 L + \frac{1}{2}M)\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t)\frac{2}{3}L$$

Rappel : Les travaux des forces d'inertie sont toujours positifs. Les travaux des ressorts et des amortisseurs sont toujours négatifs.