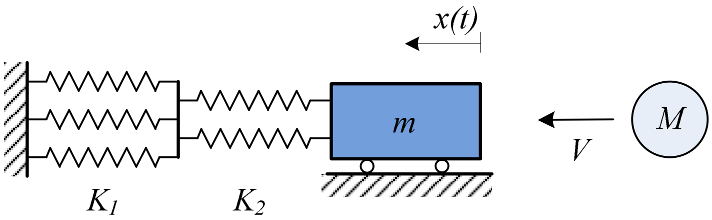
Corrigé de la série d'exercices N°6

Exercice 1



Soit K_1 la rigidité équivalente du premier étage :

$$EI = 210 \cdot 10^9 \cdot 308.2 \cdot 10^{-6} = 6.472 \cdot 10^7 \, Nm^2 = 64720 kNm^2$$

$$K_1 = 2 \cdot 12E \cdot 1{,}5I \cdot \left(\frac{4}{3H}\right)^3 + 12E \cdot 2I \left(\frac{4}{3H}\right)^3 = \frac{1280EI}{9H^3} \cong 17.98 \cdot 10^6 \, {}^N\!/_m$$

Soit K_2 la rigidité équivalente du deuxième étage :

$$K_2 = 2 \cdot 12EI \cdot \left(\frac{2}{H}\right)^3 = 192\frac{EI}{H^3} \cong 24.27 \cdot 10^6 \, {}^N\!/_m$$

Soit K_{equ} est la rigidité équivalente de K_1 et K_2 associés en série :

$$\frac{1}{K_{equ}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \Rightarrow K_{equ} = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2} \cong 10.33 \cdot 10^6 \, {}^N\!/_m$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{equ}}{m + M}} = \sqrt{\frac{10330}{2 + 8}} \cong 32.14 \frac{rad}{s}$$

Dans le cas d'un choc mou, la loi de la conservation de la quantité de mouvement nous permet d'écrire :

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

Avec : $m_1 = M \quad ; \quad m_2 = M + m \quad ; \quad v_1 = V \quad ; \quad v_2 = \dot{x}(t = 0)$

Phase 1 : L'arbre tombe sur le portique.
Phase 2 : La structure subit des oscillations.

A. On admet des oscillations non amorties.

En respectant les conditions initiales pour la phase 2 (voir cours, section 2.8.7) le déplacement x_{max} est calculé de la manière suivante :

$$x_{\max} = \left|\frac{m_1 \cdot v_1}{(m_1 + m_2) \cdot \omega_n}\right| = \left|\frac{M \cdot V}{(m + M) \cdot \omega_n}\right| = \frac{2000 \cdot 10}{(2000 + 8000) \cdot 32.14} \cong 0.062m$$

Le déplacement maximal au point B est égal à 62 millimètres.

B. Avec un amortissement $\zeta = 0.1$:

La réponse du portique est donnée par :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(C\cos(\omega_D t) + D\sin(\omega_D t)\right)$$

Avec : $\omega_D = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

La vitesse est obtenue en dérivant *x (t)* par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = \left(D\omega_D - C\zeta\omega_n\right)e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_D t\right) - \left(D\zeta\omega_n + C\omega_D\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_D t\right)$$

Les coefficients C et D sont déterminés en utilisant les conditions initiales :

$$x(0) = 0 = C$$

$$\dot{x}(0) = \frac{M}{m+M}V = \left(D\omega_D - C\zeta\omega_n\right) = D\omega_D$$

Ce qui donne :

$$C = 0 \quad et \quad D = \frac{MV}{\left(m+M\right)\omega_D}$$

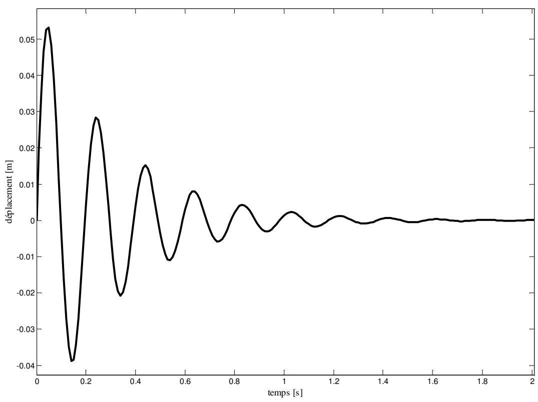
L'équation du mouvement (oscillations amorties) devient donc :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\,\frac{MV}{\left(m+M\right)\omega_D}\sin\left(\omega_D t\right)$$

Avec : $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 31.98\,\frac{rad}{s}$

Ce qui donne :

$$x(t) = 0,0625\; e^{-3,214t}\sin\left(31,98t\right)$$



Sur la figure ci-dessus, on peut observer que le déplacement maximal est égale à 0.053 m à *t*=0.05s.

Exercice 2

1. Calculons la valeur du déplacement maximal que trouverai chacun des deux étudiants.

Etudiant A :

$$x_{\max} = 2.\frac{F}{k} = 2.\frac{M.g}{k} = 0.06\ m$$

Etudiant B :

La masse M touche le plateau à une vitesse V_1 : $V_1 = \sqrt{2gh} = 4.47\ m/s$

La pulsation propre du système est égale à : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}} = 14.14\ rad/s$

$$x_{\max} = \frac{MV_1}{(M+m)\omega_n} = 0.19\ m$$

2. L'étudiant B donne une modélisation correcte. L'étudiant A néglige l'effet dynamique du choc entre les deux masse. Aussi, les caractéristiques du système oscillant sont modifiées après le choc (masse et pulsation propre).