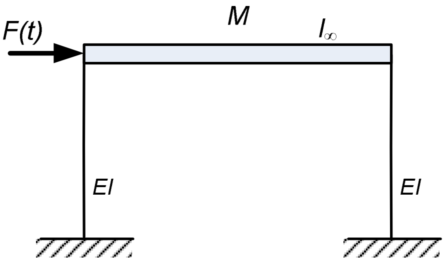
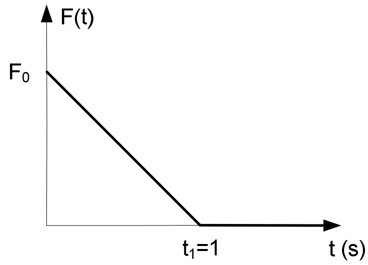
## Corrigé de la série d'exercices N°5

## Exercice 1

Pour cet exercice, se référer aux transparents du cours (section 2.7.1)

## Exercice 2




La rigidité du système : $K = 2 \cdot \dfrac{12EI}{H^3} = 2.016 \cdot 10^6 \, N/m$

La pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{M}} = 20.08 \, rad/s$

L'intégrale de Duhamel s'écrit (sans amortissement) :

$$x(t) = \frac{1}{M\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin(\omega_n (t - \tau)) d\tau$$

Avec : $F(t) = F_0 \left[1 - \dfrac{t}{t_1}\right]$ $\qquad 0 \le t \le t_1$

$F(t) = 0$ $\qquad t \ge t_1$

**Etape 1 :** $0 \le t \le t_1$

$$x(t) = \frac{F_0}{M\omega_n} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(1 - \frac{\tau}{t_1}\right) \sin \omega_n \left(t - \tau\right) d\tau$$

$$= \frac{F_0}{M\omega_n} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau - \frac{F_0}{M\omega_n t_1} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

Rappel : Intégration par parties

$$\int u(\tau) v'(\tau) d\tau = u(\tau)v(\tau) - \int u'(\tau) v(\tau) d\tau$$

Avec $\left| \begin{array}{l} u(\tau) = \tau \\ u'(\tau) = 1 \end{array} \right.$ $\qquad \left| \begin{array}{l} v'(\tau) = \sin(\omega_n (t - \tau)) \\ v(\tau) = 1/\omega_n \cos(\omega_n (t - \tau)) \end{array} \right.$

$$x(t) = \frac{F_0}{M\omega_n^2} \left[\cos \omega_n \left(t - \tau\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{F_0}{M\omega_n^2 t_1} \left\{ \left[\tau \cos \omega_n \left(t - \tau\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_{\tau=0}^{\tau=t} \cos \omega_n \left(t - \tau\right) d\tau \right\}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{M\omega_n^2} \left(1 - \cos \omega_n t\right) - \frac{F_0}{M\omega_n^2 t_1} \left\{ t - \left[ -\frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n (t - \tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \right\}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{M\omega_n^2}\left(1 - \cos\omega_n t\right) - \frac{F_0}{M\omega_n^2}\left(\tfrac{t}{t_1} - \tfrac{1}{\omega_n t_1}\sin\omega_n t\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{M\omega_n^2}\left\{1 - \cos\omega_n t - \tfrac{t}{t_1} + \tfrac{1}{\omega_n t_1}\sin\omega_n t\right\}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{K}\left\{\omega_n \sin(\omega_n t) - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1}\cos(\omega_n t)\right\}$$

**Etape 2 :** $t \geq t_1$

A l'instant: $t = t_1$, la force de perturbation s'annule. Le portique continue à osciller à cause des conditions initiales non nulles (déplacement et vitesse à l'instant *t=1s*). Les vibrations correspondent alors à un cas d'oscillations libres non amorties.

La réponse de la structure s'écrit alors : $x(\bar{t}) = \dfrac{V_0}{\omega_n}\sin(\omega_n \bar{t}) + X_0\cos(\omega_n \bar{t})$ avec $\bar{t} = t - t_1$

Les conditions initiales sont :

$$X_0 = x(t_1) = \frac{F_0}{K}\left\{-\cos(\omega_n t_1) + \frac{1}{\omega_n t_1}\sin(\omega_n t_1)\right\}$$

$$V_0 = \dot{x}(t_1) = \frac{F_0}{K}\left\{\omega_n \sin(\omega_n t_1) - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1}\cos(\omega_n t_1)\right\}$$

Déplacement statique : $\delta_{stat} = \dfrac{F_0}{K} \cong 4.96cm$

Lorsque $t_1 = 1s$ : $x(t_1) = -0.0142m$ et $\dot{x}(t_1) = 0.906\, m/s$

Déplacement maximale pour $t \geq t_1$ : $x_{\max}(t \geq t_1) = \sqrt{\left(X_0\right)^2 + \left(\dfrac{V_0}{\omega_n}\right)^2} = 0.047m$

Pour $t < t_1$, on est dans le cas d'une charge appliquée brusquement suivie d'une décroissance linéaire (triangulaire). Pour ce cas, le livre « Dynamique des structures » (Pierino Lestuzzi et Ian F.C. Smith) ne propose pas de spectre de réponse en déplacement pour calculer le facteur d'amplification dynamique $R_d$. Par conséquent, pour déterminer le déplacement maximal, il faut chercher les valeurs pour lesquelles la réponse pour $t < t_1$ est maximale (c'est-à-dire chercher les valeurs de t pour lesquelles la dérivée est égale à zéro et trouver les valeurs du déplacement).
D'autres auteurs proposent un spectre aussi pour ce type de chargement. Vous trouvez ce spectre dans la figure ci-dessous.

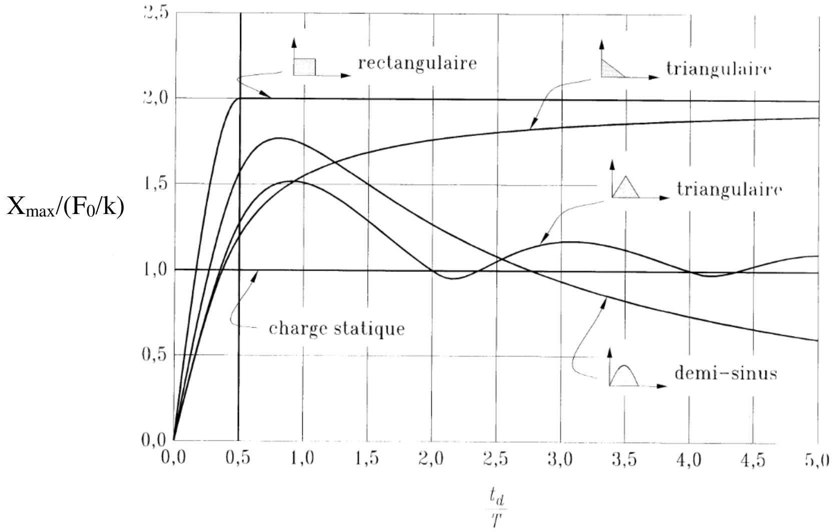
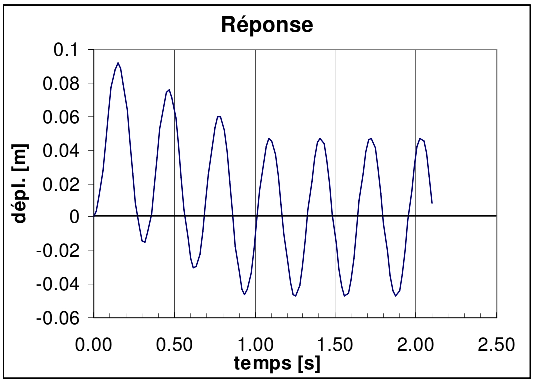



**Figure 7.21.** *Spectre de réponse en déplacement ou spectre de choc pour différentes charges impulsionnelles*

Déplacement maximal : $x_{\max} \cong 1.85 \cdot \delta_{stat} = 9.176cm$

La réponse du portique est donnée dans la figure ci-dessous.




## Exercice 3

La rigidité du système : $k = \dfrac{3EI}{L^3} = 9.84 \cdot 10^5 \, N/m$

La pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{M}} = 11.85 \, rad/s$

- ✓ Pour $t \le t_d/2$ :

La force augmente linéairement et la solution peut être obtenue en utilisant l'intégrale de Duhamel.

$$x(t) = \frac{1}{M\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin(\omega_n(t-\tau))d\tau \quad avec \quad F(\tau) = F_0\frac{2\tau}{t_d}$$

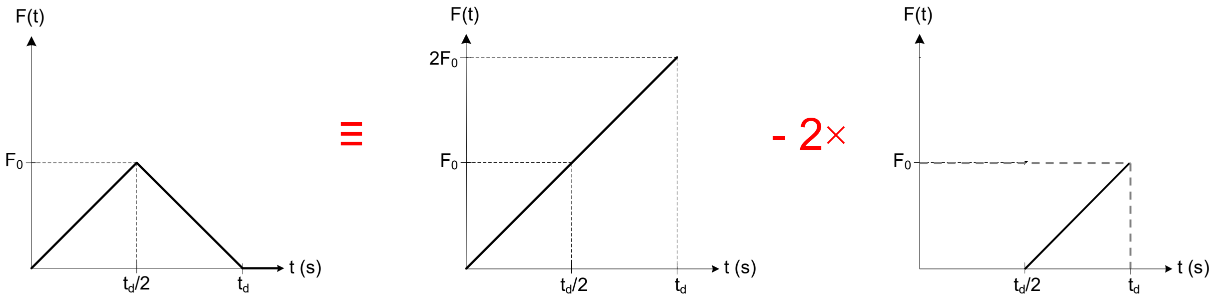
$$x(t) = \frac{2F_0}{m\,\omega_n\,t_d}\int_{\tau=0}^{\tau=t} \tau \sin\omega_n\left(t-\tau\right)d\tau = \frac{2F_0}{m\,\omega_n\,t_d}\left\{\left[\frac{\tau\cos\omega_n\left(t-\tau\right)}{\omega_n}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_{\tau=0}^{\tau=t}\frac{\cos\omega_n\left(t-\tau\right)}{\omega_n}d\tau\right\}$$

$$x(t) = \frac{2F_0}{M\omega_n^2 t_d}\left\{t + \left[\tfrac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}\right\}$$

$$x(t) = \frac{2F_0}{M\omega_n^2 t_d}\left\{t - \tfrac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}$$

- ✓ Pour $t_d/2 \le t \le t_d$ :

Comme pour le cas précédent, la réponse à la charge peut être obtenue en utilisant l'intégrale de Duhamel. Il est, néanmoins, plus simple de considérer cette charge comme la somme d'une charge variant linéairement, $F_1(t) = 2F_0\, t/t_d$, appliquée à $t = 0$, et d'une charge deux fois plus importante mais négative, $F_2(t) = -2\times 2F_0\left(t - t_d/2\right)/t_d$, appliquée à $t = t_d/2$.




La réponse du système à une force augmentant linéairement appliquée à $t = 0$ s'écrit :

$$R_1(t) = \frac{2F_0}{m\omega_n^2 t_d}\left\{t - \tfrac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}$$

Et la réponse du système à la même force appliquée à $t = t_d/2$ s'écrit :

$$R_2(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{\tau=t_d/2}^{\tau=t}\frac{2F_0\left(\tau - \dfrac{t_d}{2}\right)}{t_d}\cdot\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$R_2(t) = \frac{2F_0}{m\omega_n^2 t_d}\left\{t - \frac{t_d}{2} - \frac{1}{\omega_n}\cdot\sin\omega_n(t - \frac{t_d}{2})\right\}$$

La réponse de la structure est donc donnée par : $x(t) = R_1(t) - 2R_2(t)$

Ce qui donne :

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left[1 - \frac{t}{t_d} - \frac{1}{\omega_n t_d}\sin\omega_n t + \frac{2}{\omega_n t_d}\sin\omega_n\left(t - t_d/2\right)\right]$$

$$\dot{x}(t) = \frac{2F_0}{k}\left[-\frac{1}{t_d} - \frac{1}{t_d}\cos\omega_n t + \frac{2}{t_d}\cos\omega_n\left(t - t_d/2\right)\right]$$

✓ Pour $t \geq t_d$ :

A partir de l'instant: $t = t_d$ , la force de perturbation s'annule. La structure continue pourtant à osciller à cause des conditions initiales non nulles (déplacement et vitesse à l'instant $t = t_d$ ). Les vibrations correspondent alors à un cas d'oscillations libres non amorties.

La réponse de la structure s'écrit alors : $x(\bar{t}) = \frac{V_0}{\omega_n}\sin(\omega_n \bar{t}) + X_0\cos(\omega_n \bar{t})$ avec $\bar{t} = t - t_d$

Pour $t_d = 1s$ , les conditions initiales sont :

$$X_0 = x(t_d = 1\,\mathrm{s}) = -1.53\,10^{-3}\,m$$

$$V_0 = \dot{x}(t_d = 1\,\mathrm{s}) = 0.0483\,m/s$$

La réponse du portique peut être écrite comme :

$$x(\bar{t}) = 4.076 \cdot 10^{-3} \cdot \sin\left(11.85\bar{t}\right) - 1.53\ \cos\left(11.85\bar{t}\right) \quad [mm]$$