

3 Oscillateur simple équivalent pour systèmes à masse répartie

3.1 Introduction

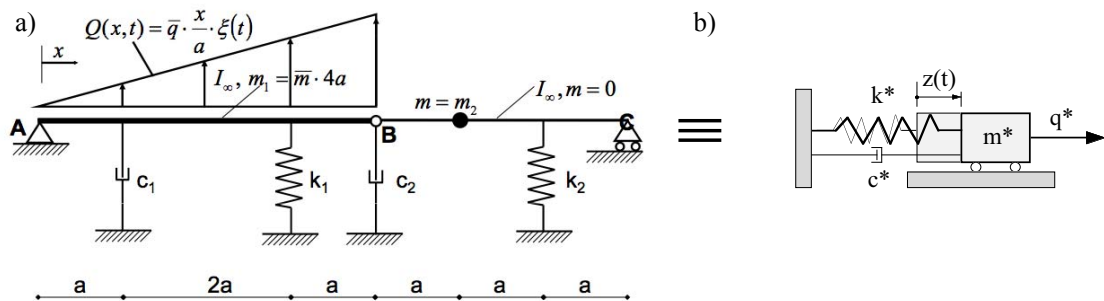


Figure 3.1: Exemple d'assemblage de corps rigides (a). Oscillateur simple équivalent (b).

3.2 Assemblage de corps rigides

L'objectif est d'aboutir à un système à un degré de liberté équivalent. Conformément à la deuxième loi de *Newton*, l'équation du mouvement s'exprime:

$$m^* \cdot \ddot{z} + c^* \cdot \dot{z} + k^* \cdot z = q^* \quad (3.1)$$

m^* , k^* , c^* , q^* : masse, rigidité, constante d'amortissement et force généralisées
 z , \dot{z} , \ddot{z} : coordonnées généralisées du déplacement, de la vitesse et de l'accélération

En analogie avec les oscillateurs simples, la pulsation propre du système équivalent se détermine à partir des grandeurs généralisées:

$$\omega_n = \sqrt{k^*/m^*} \quad (3.2)$$

Les grandeurs généralisées sont liées à l'équilibre dynamique de l'assemblage de corps rigides et peuvent être déterminées à partir du *principe des travaux virtuels*.

3.2.1 Formulation à l'aide des travaux virtuels

Le travail virtuel est composé de deux parties, le travail virtuel externe (δW_{ext}) et le travail virtuel interne (δW_{int}). Le travail virtuel externe est lié aux forces extérieures (F_{ext}), aux ressorts (F_S) et aux amortisseurs (F_D). Le travail virtuel interne est lié à la force d'inertie (F_I et M_I). Le travail virtuel total est constitué par les sommes des travaux virtuels individuels:

$$\delta W_{\text{ext}} - \delta W_{\text{int}} = 0 = \sum_i F_{Si} \cdot \delta z_{Si} + \sum_j F_{Dj} \cdot \delta z_{Dj} + \sum F_{\text{ext}} \cdot \delta z_F - \sum_k F_{Ik} \cdot \delta z_{Ik} - \sum_k M_{Ik} \cdot \delta \theta_k \quad (3.3)$$

3.2.2 Exemple: assemblage de deux poutre rigides

Pour l'analyse d'assemblages de corps rigides, la procédure consiste d'abord à spécifier la position déformée du système par une coordonnée généralisée $z(t)$ et à identifier les forces qui y sont liées. Le *principe des travaux virtuels* est ensuite appliqué sur la base du déplacement virtuel constitué par un supplément de déformée et défini par un incrément de déplacement (δz). Aux forces des ressorts (F_S) et des amortisseurs (F_D) qui s'opposent aux mouvements, il faut ajouter les forces d'inertie (F_I et M_I) qui agissent dans le sens du mouvement.

Convention : $\uparrow +$ $\rightarrow +$ $\curvearrowright +$

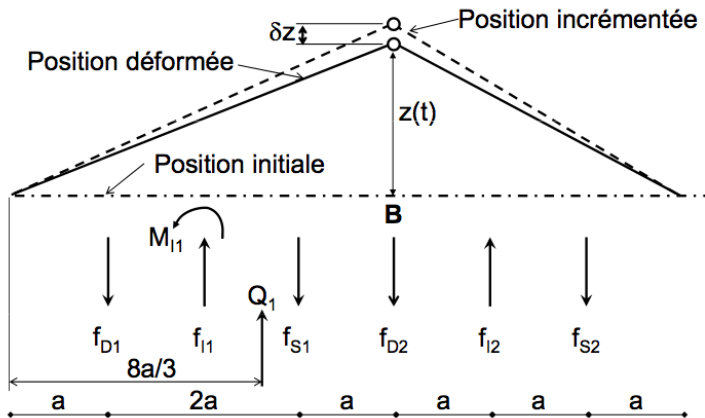


Figure 3.2: Déformée de l'assemblage de corps rigides de la figure 3.1a avec les forces associées.

La déformée étant composée de segments rigides, les forces et les déplacements virtuels associés aux différents éléments sont déterminés à partir de considérations géométriques, sous l'hypothèse de petits déplacements.

Ressorts

La contribution du premier ressort et celle du second ressort s'expriment:

$$F_{S1} \cdot \delta z_{S1} = \left[-K_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot z(t) \right] \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \delta z \right] = -K_1 \cdot \frac{9}{16} \cdot z(t) \cdot \delta z \quad (3.4)$$

$$F_{S2} \cdot \delta z_{S2} = \left[-K_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot z(t) \right] \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \delta z \right] = -K_2 \cdot \frac{1}{9} \cdot z(t) \cdot \delta z \quad (3.5)$$

Amortisseurs

La contribution du premier amortisseur et celle du second s'expriment:

$$F_{D1} \cdot \delta z_{D1} = \left[-C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \dot{z}(t) \right] \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \delta z \right] = -C_1 \cdot \frac{1}{16} \cdot \dot{z}(t) \cdot \delta z \quad (3.6)$$

$$F_{D2} \cdot \delta z_{D2} = \left[-C_2 \cdot \dot{z}(t) \right] \cdot \left[\delta z \right] = -C_2 \cdot \dot{z}(t) \cdot \delta z \quad (3.7)$$

Masses

La contribution de la masse répartie et celle de la seconde masse s'expriment:

$$F_{I1} \cdot \delta z_{I1} = \left[m_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ddot{z}(t) \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \delta z \right] = \left[\bar{m} \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} \cdot \ddot{z}(t) \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \delta z \right] = \bar{m} \cdot a \cdot \ddot{z}(t) \cdot \delta z \quad (3.8)$$

$$F_{I2} \cdot \delta z_{I2} = \left[m_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \ddot{z}(t) \right] \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \delta z \right] = m_2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \ddot{z}(t) \cdot \delta z \quad (3.9)$$

Les équations ci-dessus considèrent l'inertie en translation des masses. Pour la masse répartie, il faut encore tenir compte de l'inertie en rotation de la barre rigide:

$$M_{I1} \cdot \delta \theta = I_0 \cdot \ddot{\theta} \cdot \delta \theta = \left[I_0 \cdot \frac{\ddot{z}(t)}{4a} \right] \cdot \left[\frac{\delta z}{4a} \right] = \left[4a \cdot \bar{m} \cdot \frac{(4a)^2}{12} \cdot \frac{\ddot{z}(t)}{4a} \right] \cdot \left[\frac{\delta z}{4a} \right] = \frac{\bar{m} \cdot a}{3} \cdot \ddot{z}(t) \cdot \delta z \quad (3.10)$$

I_0 représente le moment d'inertie en rotation d'une barre rigide avec une masse répartie uniforme:

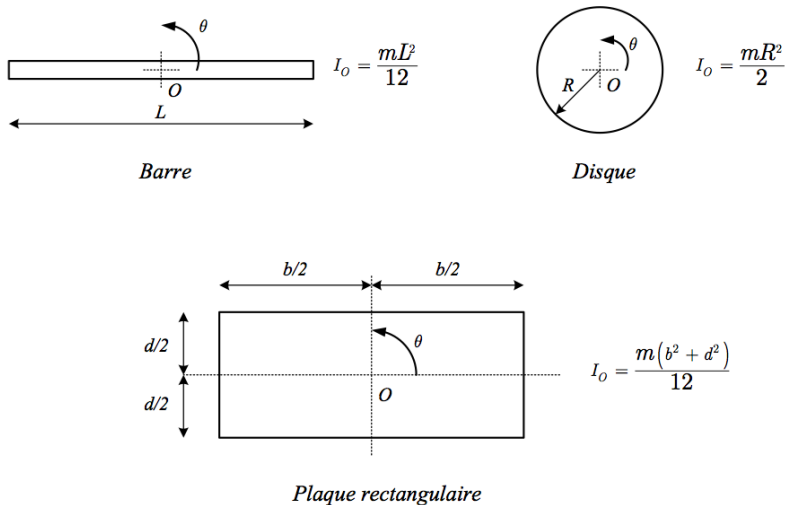


Figure 3.3: Moment d'inertie en rotation de quelques corps rigides avec une masse répartie uniforme.

Force

La contribution de la force répartie de manière triangulaire et agissant sur la première barre s'exprime:

$$F_{\text{ext}} \cdot \delta z_F = [8a\bar{q} \cdot \xi(t)] \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \delta z \right] = \frac{16}{3} \cdot a\bar{q} \cdot \xi(t) \cdot \delta z \quad (3.11)$$

D'un point de vue pratique, le regroupement de toutes les contributions dans un tableau facilite la vue d'ensemble de la procédure.

Convention : $\uparrow +$ \curvearrowright

Type d'action	Designation	Valeur de l'effort associé à $z(t)$ (1)	Incrément du déplacement en fonction de δz (2)	Contribution au travail virtuel (1) x (2)
Forces dues aux ressorts	f_{s1}	$-K_1 \frac{3}{4} z(t)$	$\frac{3}{4} \delta z$	$-\frac{9}{16} K_1 z(t) \delta z$
	f_{s2}	$-K_2 \frac{z(t)}{3}$	$\frac{1}{3} \delta z$	$-\frac{1}{9} K_2 z(t) \delta z$
Forces dues aux amortisseurs	f_{D1}	$-C_1 \frac{\dot{z}(t)}{4}$	$\frac{1}{4} \delta z$	$-\frac{1}{16} C_1 \dot{z}(t) \delta z$
	f_{D2}	$-C_2 \dot{z}(t)$	δz	$-C_2 \dot{z}(t) \delta z$
Inertie	f_{I1}	$m_1 \frac{\ddot{z}(t)}{2} = 2\bar{m}a\ddot{z}(t)$	$\frac{1}{2} \delta z$	$\bar{m}a\ddot{z}(t) \delta z$
	f_{I2}	$m_2 \frac{2}{3} \ddot{z}(t)$	$\frac{2}{3} \delta z$	$\frac{4}{9} m_2 \ddot{z}(t) \delta z$
	M_{I1}	$I_0 \ddot{\theta} = I_0 \frac{\ddot{z}(t)}{4a} = 4\bar{m}a^2 \frac{\ddot{z}(t)}{3}$	$\frac{1}{4a} \delta z$	$\frac{1}{3} \bar{m}a\ddot{z}(t) \delta z$
Forces externes	f_{ext}	$8a\bar{q}\xi(t)$	$\frac{2}{3} \delta z$	$\frac{16}{3} a\bar{q}\xi(t) \delta z$

En réunissant les contributions, on obtient l'équation du mouvement de l'oscillateur simple équivalent:

$$\left(\frac{9}{16}K_1 + \frac{K_2}{9}\right) \cdot z(t) \cdot \delta z + \left(\frac{C_1}{16} + C_2\right) \cdot \dot{z}(t) \cdot \delta z + \left(\bar{m}a + \frac{\bar{m}a}{3} + \frac{4}{9}m_2\right) \cdot \ddot{z}(t) \cdot \delta z = \frac{16}{3} \cdot a\bar{q} \cdot \xi(t) \cdot \delta z$$
$$\left(\frac{4\bar{m}a}{3} + \frac{4}{9}m_2\right) \cdot \ddot{z}(t) + \left(\frac{C_1}{16} + C_2\right) \cdot \dot{z}(t) + \left(\frac{9}{16}K_1 + \frac{K_2}{9}\right) \cdot z(t) = \frac{16}{3} \cdot a\bar{q} \cdot \xi(t) \quad (3.12)$$

On peut alors facilement identifier les paramètres de l'oscillateur simple équivalent:

$$m^* = \frac{4\bar{m}a}{3} + \frac{4}{9}m_2 \quad k^* = \frac{9}{16}K_1 + \frac{K_2}{9} \quad c^* = \frac{C_1}{16} + C_2 \quad q^* = \frac{16}{3} \cdot a\bar{q} \cdot \xi(t)$$

La pulsation propre du système est donnée par la relation suivante:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{9}{16}K_1 + \frac{K_2}{9}\right)}{\left(\frac{4\bar{m}a}{3} + \frac{4}{9}m_2\right)}}$$

3.2.3 Influence d'un effort normal

Un effort normal modifie la rigidité du système et son influence peut être prise en compte par sa contribution aux travaux virtuels. Pour une force de compression horizontale N , il faut déterminer l'incrément de déplacement virtuel horizontal (δh) avec l'hypothèse de petits déplacements.

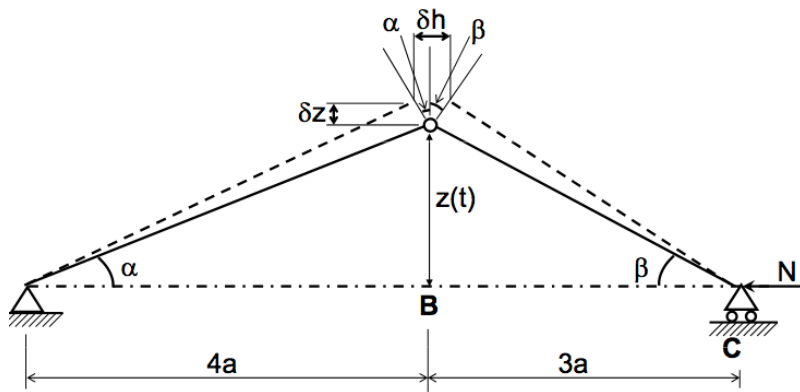


Figure 3.5: Influence d'une force de compression.

Le déplacement virtuel horizontal (δh) est constitué de la somme des composantes horizontales des déplacements virtuels des extrémités des deux barres rigides. Il s'exprime de la manière suivante:

$$\delta h = \delta z \cdot (\alpha + \beta) = \delta z \cdot \left(\frac{z(t)}{4a} + \frac{z(t)}{3a} \right) = \frac{7}{12a} \cdot z(t) \cdot \delta z$$

La contribution de la force de compression N au travail virtuel est donc:

$$\delta W_N = N \cdot \delta h = N \cdot \frac{7}{12a} \cdot z(t) \cdot \delta z \quad (3.13)$$

La rigidité équivalente doit alors être corrigée de la manière suivante:

$$\bar{k}^* = k^* - \left(N \cdot \frac{7}{12a} \right) = \left(\frac{9}{16} K_1 + \frac{K_2}{9} \right) - \frac{7N}{12a} \quad (3.14)$$

La rigidité équivalente corrigée (\bar{k}^*) permet de déterminer la charge critique de flambage:

$$\bar{k}^* = 0 \quad \Rightarrow N_{cr} = \left(\frac{9}{16} K_1 + \frac{K_2}{9} \right) \cdot \frac{12a}{7} \quad (3.15)$$

3.2.4 Exemple: plaque rigide rectangulaire

La masse de la plaque est uniformément répartie (γ). Des considérations géométriques permettent d'exprimer les déplacements virtuels en fonction de δz (angle de rotation $\delta z/a$). Le déplacement virtuel vertical du centre de masse de la plaque est $\delta z/2$ et son déplacement virtuel horizontal est $b/2 \cdot \delta z/a$.

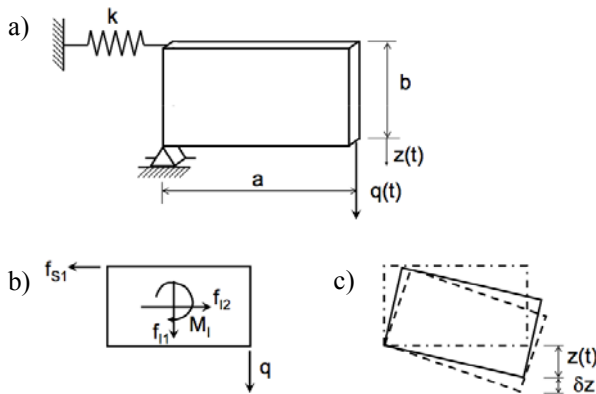


Figure 3.6: Plaque rigide avec masse répartie (a). Forces à considérer (b). Déformée (c).

Convention : $\uparrow +$ $\rightarrow +$ \curvearrowright

Type d'action	Designation	Valeur de l'effort associé à $z(t)$ (1)	Incrément du déplacement en fonction de δz (2)	Contribution au travail virtuel (1) x (2)
Force due au ressort	\mathbf{f}_{s1}	$-K \frac{b}{a} z(t)$	$\frac{b}{a} \delta z$	$-\left(\frac{b}{a}\right)^2 K z(t) \delta z$
Inertie	\mathbf{f}_{11}	$-\gamma ab \frac{\ddot{z}(t)}{2}$	$-\frac{1}{2} \delta z$	$\gamma \frac{ab}{4} \ddot{z}(t) \delta z$
	\mathbf{f}_{12}	$\gamma \frac{ab}{2} \frac{b}{a} \ddot{z}(t)$	$\frac{1}{2} \frac{b}{a} \delta z$	$\gamma \frac{ab}{4} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \ddot{z}(t) \delta z$
	\mathbf{M}_{11}	$I_p \ddot{\theta} = -\gamma ab \left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right) \frac{\ddot{z}(t)}{a}$	$-\frac{\delta z}{a}$	$\gamma ab \frac{a^2 + b^2}{12a^2} \ddot{z}(t) \delta z$
Forces externes	\mathbf{q}	$-q(t)$	$-\delta z$	$q(t) \delta z$

Figure 3.7: Tableau synthétisant le calcul des contributions au travail virtuel.

En réunissant les contributions, on obtient l'équation du mouvement de l'oscillateur simple équivalent:

$$\frac{\gamma ab}{4} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{a^2 + b^2}{3a^2} \right) \cdot \ddot{z}(t) + \left(\frac{b}{a} \right)^2 K \cdot z(t) = \frac{\gamma ab}{4} \left(\frac{3a^2 + 3b^2 + a^2 + b^2}{3a^2} \right) \cdot \ddot{z}(t) + \left(\frac{b}{a} \right)^2 K \cdot z(t) = q(t)$$

$$\frac{\gamma b}{3a} \cdot (a^2 + b^2) \cdot \ddot{z}(t) + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cdot K \cdot z(t) = q(t) \quad (3.21)$$

On peut alors facilement identifier les paramètres de l'oscillateur simple équivalent:

$$m^* = \frac{\gamma b}{3a} \cdot (a^2 + b^2) \quad k^* = \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cdot K \quad c^* = 0 \quad q^* = q(t)$$

La pulsation propre du système est donnée par la relation suivante:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{\frac{\gamma b}{3a} \cdot (a^2 + b^2)}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 \cdot K}} = \sqrt{\frac{\gamma a \cdot (a^2 + b^2)}{3b \cdot K}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a} \right)^2 \cdot K}{\frac{\gamma b}{3a} \cdot (a^2 + b^2)}} = \sqrt{\frac{3b \cdot K}{\gamma a \cdot (a^2 + b^2)}}$$

3.2.5 Exemple: balancement latéral d'un mur rigide

La rupture de murs en maçonnerie non armée hors de leur plan est un dégât sismique typique. L'analyse dynamique de ce mode de rupture peut être effectuée à l'aide des assemblages de corps rigides. Le mur en console est idéalisé par une poutre infiniment rigide, élastiquement encastrée à sa base.

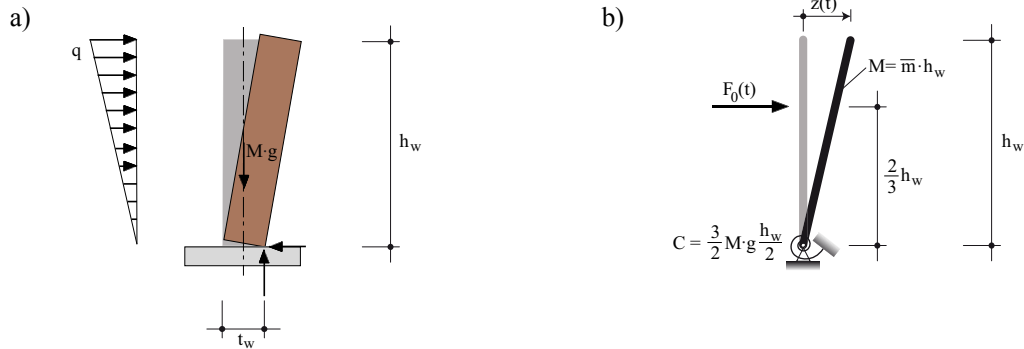


Figure 3.8: Analyse dynamique d'un panneau de maçonnerie basculant hors de son plan comme un corps rigide (a). Modélisation par une poutre infiniment rigide, élastiquement appuyée à sa base (b).

En réunissant les contributions, on obtient l'équation du mouvement de l'oscillateur simple équivalent:

$$\left(\frac{M}{4} + \frac{M}{12}\right) \cdot \ddot{z}(t) + \frac{3Mg}{4h_w} \cdot z(t) = \frac{M}{3} \cdot \ddot{z}(t) + \frac{3Mg}{4h_w} \cdot z(t) = \frac{2}{3} \cdot F_0(t) \quad (3.26)$$

On peut alors facilement identifier les paramètres de l'oscillateur simple équivalent:

$$m^* = \frac{M}{3} \qquad k^* = \frac{3Mg}{4h_w} \qquad q^* = \frac{2}{3} \cdot F_0(t)$$

La pulsation propre du système ne dépend que de la hauteur du mur (h_w). Elle est donnée par:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{\frac{3Mg}{4h_w}}{\frac{M}{3}}} = \sqrt{\frac{9g}{4h_w}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{h_w}}$$

Un pendule formé d'une barre rigide avec une masse répartie se résout de façon similaire.

La pulsation propre ne dépend que de la longueur (L) de la barre; elle s'exprime: $\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

3.3 Assemblage de corps flexibles

En présence de corps flexibles avec des masses réparties, il y a une infinité de degrés de liberté. Cependant si la forme de la déformée est fixée a priori, il est possible d'appliquer le *principe des travaux virtuels* pour déterminer les caractéristiques d'un oscillateur simple équivalent.

L'hypothèse de forme inchangée de la déformée ($u(x,t)$) permet de décomposer le mouvement du système par l'intermédiaire d'un produit de fonctions:

$$u(x, t) = \Psi(x) \cdot z(t) \tag{3.27}$$

La forme de la déformée est fixe dans le temps et est définie par la fonction $\Psi(x)$. Son évolution au cours du temps est spécifiée par la coordonnée généralisée $z(t)$ qui marque l'amplitude du déplacement dans un point caractéristique. Mathématiquement, il s'agit d'une séparation de variables. A partir de cette hypothèse, l'expression des différentes dérivées se simplifie:

$$u'(x, t) = \Psi'(x) \cdot z(t)$$

$$u''(x, t) = \Psi''(x) \cdot z(t)$$

$$\dot{u}(x, t) = \Psi(x) \cdot \dot{z}(t)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \Psi(x) \cdot \ddot{z}(t)$$

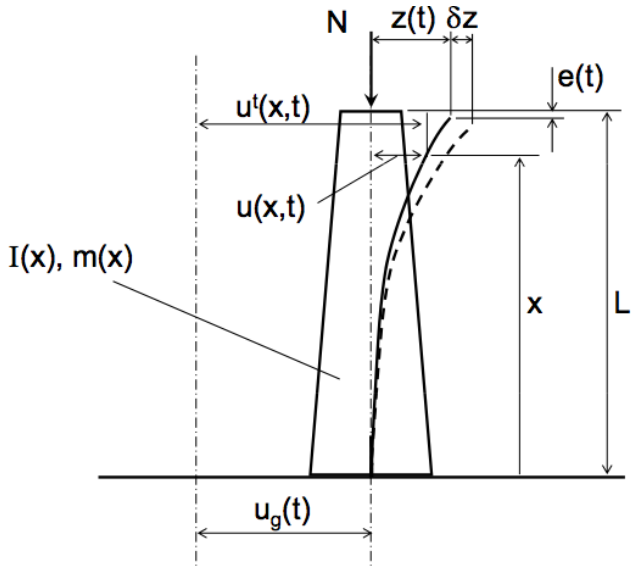


Figure 3.9: Corps flexibles. Console verticale soumise à une accélération de sa base (séisme).

3.3.1 Exemple: console verticale soumise à un séisme

Pour l'exemple de la console verticale soumise à une excitation de sa base (mouvement sismique), le déplacement latéral relatif de la console le long de sa hauteur est spécifié par la fonction $u(x,t)$. La coordonnée généralisée $z(t)$ caractérise l'amplitude du déplacement relatif latéral au sommet.

Rigidité en flexion

Pour un petit élément de longueur dx en position déformée, le travail du moment de flexion correspondant sur la rotation relative virtuelle $\delta(d\phi)$ s'exprime comme suit:

$$\begin{aligned} M \cdot \delta(d\phi) &= [-EI(x) \cdot u''(x, t)] \cdot \left[-\delta\left(\frac{dx}{\rho}\right) \right] = [-EI(x) \cdot \Psi''(x) \cdot z(t)] \cdot [-\delta(u''(x, t) \cdot dx)] \\ &= [-EI(x) \cdot \Psi''(x) \cdot z(t)] \cdot [-\Psi''(x) \cdot \delta z \cdot dx] = EI(x) \cdot [\Psi''(x)]^2 \cdot dx \cdot z(t) \cdot \delta z \end{aligned}$$

Il faut intégrer sur la longueur de la console pour obtenir le travail virtuel total:

$$\int_0^L M \cdot \delta(d\phi) = \int_0^L EI(x) \cdot [\Psi''(x)]^2 \cdot dx \cdot z(t) \cdot \delta z = z(t) \cdot \delta z \cdot \int_0^L EI(x) \cdot [\Psi''(x)]^2 \cdot dx$$

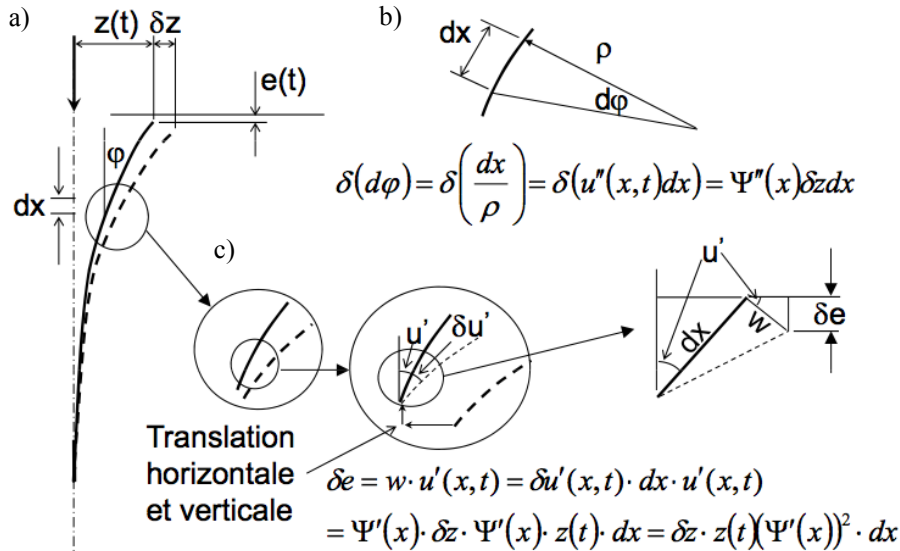


Figure 3.10: Détail de l'influence d'une force de compression. Position déformée (a). Rotation relative virtuelle (b). Déplacement virtuel vertical (c).

Force d'inertie (petit élément dx)

Le travail de la force d'inertie sur le déplacement relatif virtuel horizontal δu s'exprime:

$$\begin{aligned} F_I \cdot \delta u &= [m(x) \cdot dx \cdot \ddot{u}(x, t)] \cdot [\delta(u(x, t))] = [m(x) \cdot dx \cdot \Psi(x) \cdot \ddot{z}(t)] \cdot [\Psi(x) \cdot \delta z] \\ &= m(x) \cdot [\Psi(x)]^2 \cdot dx \cdot \ddot{z}(t) \cdot \delta z \end{aligned}$$

Il faut intégrer sur la longueur de la console pour obtenir le travail virtuel total:

$$\int_0^L F_I \cdot \delta u = \int_0^L m(x) \cdot [\Psi(x)]^2 \cdot dx \cdot \ddot{z}(t) \cdot \delta z = \ddot{z}(t) \cdot \delta z \cdot \int_0^L m(x) \cdot [\Psi(x)]^2 \cdot dx$$

Forces extérieures

Le travail de la force extérieure (N) sur l'incrément de déplacement virtuel vertical δe s'exprime:

$$N \cdot \delta e = [-N] \cdot [\delta u'(x, t) \cdot dx \cdot u'(x, t)] = [-N] \cdot [\Psi'(x) \cdot \delta z \cdot \Psi'(x) \cdot z(t) \cdot dx]$$

$$= -N \cdot [\Psi'(x)]^2 \cdot dx \cdot z(t) \cdot \delta z$$

Il faut intégrer sur la longueur de la console pour obtenir le travail virtuel total:

$$\int_0^L N \cdot \delta e = \int_0^L -N \cdot [\Psi'(x)]^2 \cdot dx \cdot z(t) \cdot \delta z = -N \cdot z(t) \cdot \delta z \cdot \int_0^L [\Psi'(x)]^2 \cdot dx$$

Avec l'accélération prescrite à la base, on considère la force équivalente appliquée directement sur la masse d'un petit élément de longueur dx dans le système à base fixe de remplacement. Le travail de cette force sur le déplacement relatif virtuel horizontal δu s'exprime :

$$F_R \cdot \delta u = [m(x) \cdot dx \cdot \ddot{u}_g] \cdot [\delta(u(x, t))] = [m(x) \cdot dx \cdot \ddot{u}_g] \cdot [\Psi(x) \cdot \delta z] = m(x) \cdot \Psi(x) \cdot \ddot{u}_g \cdot dx \cdot \delta z$$

Il faut intégrer sur la longueur de la console pour obtenir le travail virtuel total:

$$\int_0^L F_R \cdot \delta u = \int_0^L m(x) \cdot \Psi(x) \cdot \ddot{u}_g \cdot dx \cdot \delta z = \ddot{u}_g \cdot \delta z \cdot \int_0^L m(x) \cdot \Psi(x) \cdot dx$$

Convention : 

Type d'action	Desig. de l'effort sur dx	Valeur de l'effort associé à z(t) sur dx (1)	Incrément du déplacement en fonction de δz sur dx (2)	Contribution au travail virtuel (1) x (2)	Intégrale X=0 → L
Force liée à la rigidité en flexion	M	$-EI(x)u''(x,t)$ $= -EI(x)\Psi''(x)z(t)$	$\delta(d\phi) = -\delta\left(\frac{dx}{\rho}\right)$ (A) $= -\delta(u'(x,t)dx)$ $= -\Psi''(x)\delta z dx$	$z(t)\delta z EI(x) [\Psi''(x)]^2 dx$	$z(t)\delta z E \int_0^L I(x) [\Psi''(x)]^2 dx$
Inertie	f_i	$m(x)dx \cdot \ddot{u}(x,t)$ $= m(x)dx \Psi(x)\ddot{z}(t)$	$\Psi(x)\delta z$	$\ddot{z}(t)\delta z m(x) [\Psi(x)]^2 dx$	$\ddot{z}(t)\delta z \int_0^L m(x) [\Psi(x)]^2 dx$
Forces externes	F₀	$m(x)dx \cdot \ddot{u}_g$	$\Psi(x)\delta z$	$\ddot{u}_g \delta z m(x) [\Psi(x)] dx$	$\ddot{u}_g \delta z \int_0^L m(x) \Psi(x) dx$
	N	$-N$	$\delta e = -w \cdot u'(x,t)$ $= -\delta u'(x,t) dx \cdot u'(x,t)$ (B) $= -\Psi'(x)\delta z \cdot \Psi'(x)z(t) dx$ $= -z(t)\delta z [\Psi'(x)]^2 dx$	$N\delta e$ $= Nz(t)\delta z [\Psi'(x)]^2 dx$	$Nz(t)\delta z \int_0^L [\Psi'(x)]^2 dx$

Figure 3.11: Tableau synthétisant le calcul des contributions au travail virtuel.

Après regroupement et identification, les valeurs équivalentes sont les suivantes:

$$m^* = \int_0^L m(x) \cdot [\Psi(x)]^2 \cdot dx \quad (3.28)$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) \cdot [\Psi''(x)]^2 \cdot dx - N \cdot \int_0^L [\Psi'(x)]^2 \cdot dx \quad (3.29)$$

$$q^* = \ddot{u}_g \cdot \int_0^L m(x) \cdot \Psi(x) \cdot dx \quad (3.30)$$

La rigidité équivalente permet de déterminer la charge critique de flambage:

$$k^* = 0 \Rightarrow N_{cr} = \left(\int_0^L EI(x) \cdot [\Psi''(x)]^2 \cdot dx \right) / \left(\int_0^L [\Psi'(x)]^2 \cdot dx \right) \quad (3.31)$$