2.4.5 Transmissibilité

La fraction de la force appliquée qui est transmise au support par l'intermédiaire du système est nommée ***transmissibilité*** et elle est désignée par R_f. En reprenant l'équation du mouvement de l'oscillateur simple soumis à une force harmonique, la force transmise s'exprime:

$$F_{TR}(t) = c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F_0 \cdot \sin\omega t - m \cdot \ddot{x}(t) \tag{2.28}$$

La force due à l'amortisseur et la force de rappel du ressort sont déphasées de 90°. En ne considérant que le régime permanent, la valeur maximale de la force transmise (F_{TR}) s'exprime:

$$|F_{TR,\,max}| = \sqrt{c^2 \cdot \dot{x}_{max}^2 + k^2 \cdot x_{max}^2} = \sqrt{c^2 \cdot \omega^2 \cdot x_{max}^2 + k^2 \cdot x_{max}^2} = x_{max} \cdot \sqrt{c^2 \cdot \omega^2 + k^2}$$

$$|F_{TR,\,max}| = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \cdot 1 \cdot \sqrt{k^2 + (2m\omega_n\zeta)^2 \cdot \omega^2} = \frac{F_0 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

En divisant par l'amplitude de la force perturbatrice (F_0), le facteur R_f s'exprime:

$$R_f = \frac{|F_{TR,\,max}|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = R_d \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (2.29)$$

Sans amortissement les facteurs R_f et R_d sont confondus. Les courbes se croisent pour un rapport de fréquence égal à $\omega / \omega_n = \sqrt{2}$ à une valeur de R_f=1. Pour ce rapport particulier, la force agissant sur le support est équivalente à celle agissant sur la masse, quelle que soit la valeur de l'amortissement.

Résonance du système

Dans le cas de la résonance (ω=ω_n), le facteur d'amplification R_f s'exprime:

$$R_f = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot \zeta^2}}{2 \cdot \zeta} \qquad (2.30)$$

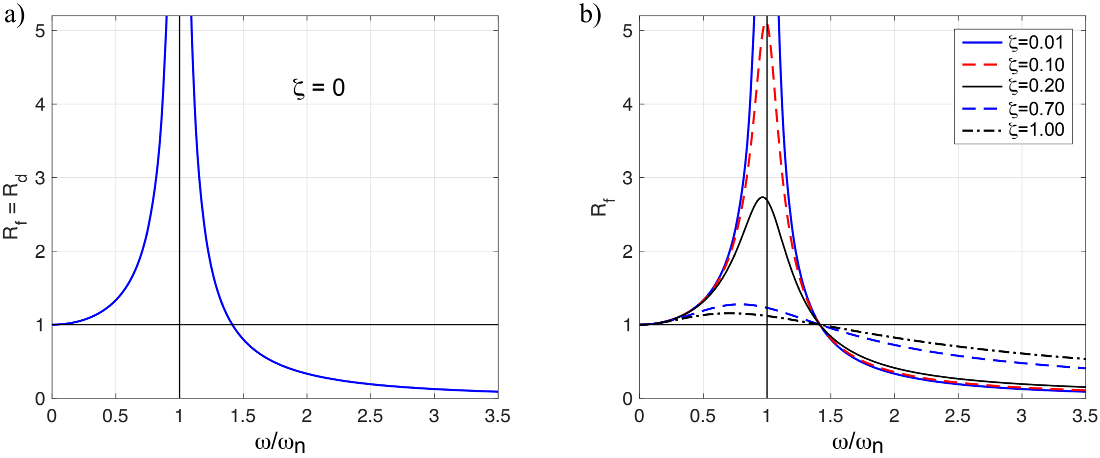
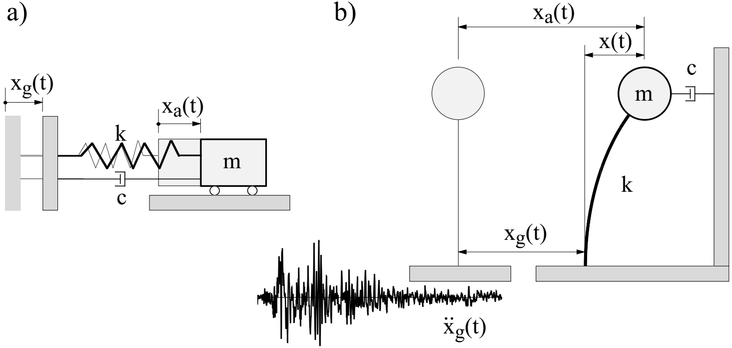


Figure 2.20: La transmissibilité est caractérisée par le facteur d'amplification dynamique (R_f).

2.5 Mouvement de la fondation

Ce cas de figure se produit en présence de vibrations induites par le trafic ferroviaire ou lors d'un séisme, par exemple. Etant donné que la fondation n'est plus fixe, il faut distinguer entre grandeurs (déplacement, vitesse, accélération) absolues et grandeurs relatives (par rapport à la fondation).



c)

$\ddot{x}_g(t)$:	accélération du sol
$x_g(t)$:	déplacement du sol
$x_a(t)$:	déplacement absolu
$x(t)$:	déplacement relatif
k:	rigidité
c:	constante d'amortissement
m:	masse
$\omega_n=\sqrt{(k/m)}$:	fréquence circulaire
$f_n=\omega_n/2\pi$:	fréquence propre
$\zeta=c/2m\omega_n$:	coefficient d'amortissement

Figure 2.21: Oscillateurs simples amortis soumis à une excitation de leur base (a et b). Définitions (c).

2.5.1 Equation différentielle

L'équation différentielle s'établit à partir des forces agissant sur la masse. Il faut être attentif au fait que la force du ressort et celle de l'amortisseur dépendent des grandeurs relatives du mouvement ($x(t)$ et $\dot{x}(t)$) alors que pour la masse c'est l'accélération absolue qui intervient dans la loi de *Newton*.

Figure 2.22: Forces agissant sur la masse pour un oscillateur simple soumis à une excitation à la base.

Conformément à la deuxième loi de *Newton*, l'équation du mouvement s'exprime:

$$m \cdot \ddot{x}_a + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \qquad \text{avec} \qquad x = x_a - x_g \tag{2.31}$$

2.5.2 Déplacement prescrit

Lorsque la sollicitation imposée à la base est un déplacement prescrit, l'équation générale devient:

$$m \cdot \ddot{x}_a + c \cdot (\dot{x}_a - \dot{x}_g) + k \cdot (x_a - x_g) = 0 \quad \Rightarrow m \cdot \ddot{x}_a + c \cdot \dot{x}_a + k \cdot x_a = c \cdot \dot{x}_g + k \cdot x_g \tag{2.32}$$

Le terme $c \cdot \dot{x}_g + k \cdot x_g$ peut être interprété comme une force équivalente appliquée directement sur la masse d'un système dont la base est fixe. Les deux systèmes sont équivalents, car gouvernés par la même équation du mouvement.

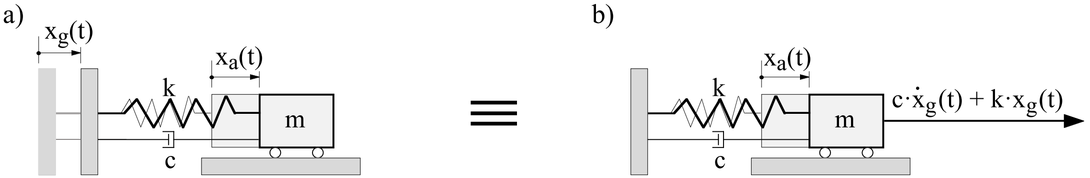


Figure 2.23: Un système soumis à une excitation à la base (a) est semblable du point de vue dynamique au même système, mais avec une base (fondation) fixe et dont la masse est soumise à une force équivalente (b).

Dans le cas d'un mouvement harmonique de la fondation, le déplacement prescrit s'exprime:

$$x_g(t) = x_{g0} \cdot \sin\omega t \tag{2.33}$$

L'amplitude de la force équivalente agissant sur la masse devient alors:

$$\left|c \cdot \dot{x}_g(t) + k \cdot x_g(t)\right| = \left|c\omega \cdot x_{g0} \cdot \cos\omega t + k \cdot x_{g0} \cdot \sin\omega t\right| = x_{g0} \cdot \sqrt{(c\omega)^2 + k^2}$$

En substituant pour l'amplitude de la force harmonique l'expression ci-dessus à F_0 dans les résultats obtenus auparavant, on obtient l'expression suivante pour le déplacement maximal de la masse (en considérant uniquement la solution particulière):

$$\left|x_a(t)\right| = \frac{\dfrac{x_{g0}}{k} \cdot \sqrt{(c\omega)^2 + k^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{x_{g0} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = x_{g0} \cdot R_f$$

2.5.3 Application des facteurs d'amplification dynamiques R_d et R_f

Concernant les domaines d'application des facteurs d'amplification dynamique R_d et R_f, il faut distinguer entre grandeurs considérées et cas de charge. Le facteur R_d s'applique pour déterminer les déplacements lorsque la force harmonique agit directement sur la masse. Pour les autres situations, c'est le facteur R_f qui intervient.

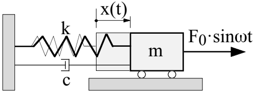
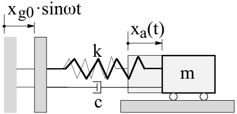
cas de charge / grandeurs		
déplacements	R_d	R_f
forces	R_f	R_f

Figure 2.24: Domaines d'application des facteurs d'amplification dynamique R_d et R_f.

2.5.4 Accélération prescrite (séisme)

Lorsque la sollicitation imposée à la base est une accélération prescrite, l'équation générale devient:

$$m \cdot (\ddot{x}_g + \ddot{x}) + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad \Rightarrow m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = -m \cdot \ddot{x}_g \tag{2.34}$$

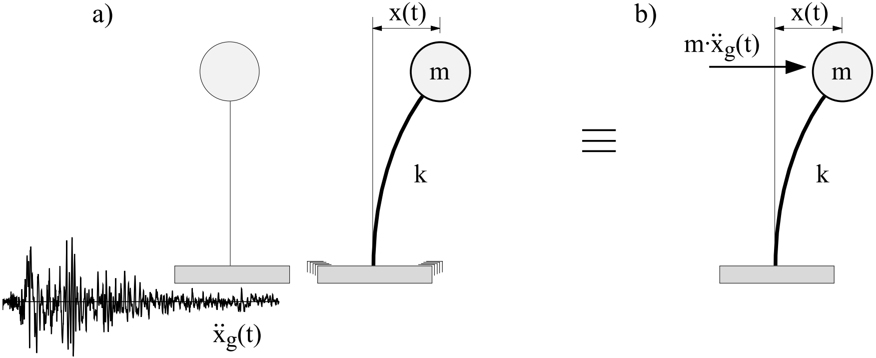


Figure 2.25: Accélération prescrite (sollicitation sismique): le système excité à sa base (a) est équivalent au même système, mais fixe et soumis à la force d'inertie de sa masse par rapport à l'accélération du sol $m \cdot \ddot{x}_g$ (b).

2.5.5 Exemple

Un exemple de mouvement de la fondation intervient pour un véhicule circulant sur une chaussée déformée qui peut être approximée par une fonction sinusoïdale d'amplitude de x_{g0}=7.5 cm. Le viaduc est constitué de travées identiques de 30 m de longueur et le véhicule roule à 70 km/h. La masse de la voiture est de m=2000 kg. La suspension fournit une constante de ressort de k=145 kN/m et un coefficient d'amortissement de ζ=40%. En faisant l'hypothèse que les pneus sont rigides et ne décollent pas de la chaussée, on peut déterminer les déplacements verticaux que subit le véhicule de la manière suivante:

propriétés dynamiques: $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{145 \cdot 10^3}{2000}} = 8.51 \ [\text{rad/s}]; \qquad \omega = 2\pi \cdot \frac{70/3.6}{30} = 4.07 \ [\text{rad/s}]$$

facteur d'amplification: $$R_f = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot (\omega/\omega_n)^2}}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot (\omega/\omega_n)^2}} = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot 0.16 \cdot 0.229}}{\sqrt{0.771^2 + 0.1466}} = 1.24$$

déplacement dynamique: $$x_{max} = R_f \cdot x_{g0} = 1.24 \cdot 7.5 \cdot 10^{-2} = 9.3 \cdot 10^{-2} \ [\text{m}]$$

Ce n'est pas la situation la plus défavorable, car le facteur R_f peut être plus grand si la vitesse du véhicule est plus élevée. Le facteur R_f atteint son maximum pour une vitesse de 131 km/h.