

2.3 Oscillations libres amorties

Les oscillations libres amorties concernent les systèmes dans lesquelles les vibrations s'atténuent progressivement au cours du temps:

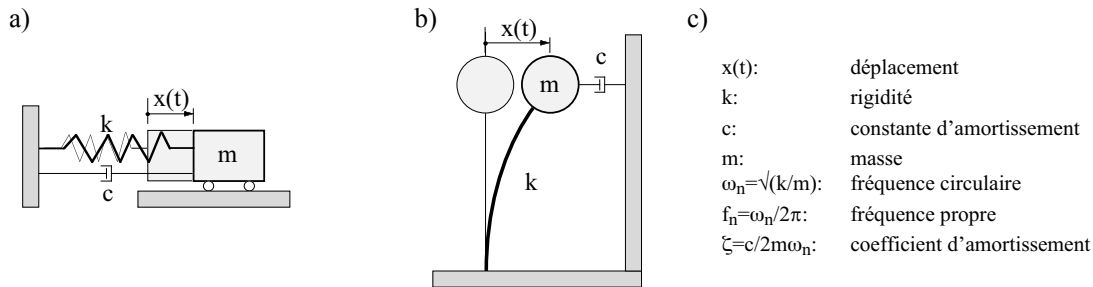


Figure 2.6: Oscillateur simple avec amortissement. Représentation traditionnelle orientée mécanique (a), représentation orientée structure (b) et définitions (c).

2.3.1 Equation différentielle

L'équation différentielle s'établit à partir des forces agissant sur la masse.



Figure 2.7: Forces agissant sur la masse pour un oscillateur simple avec amortissement.

Conformément à la deuxième loi de *Newton*, l'équation du mouvement s'exprime:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (2.9)$$

après division par m , et en posant $\zeta = c/(2m\omega_n)$, on obtient l'expression épurée suivante:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \cdot \dot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0 \quad (2.10)$$

2.3.3 Résolution

La solution est de la forme $x(t) = A \cdot e^{rt}$. Pour le paramètre (r), l'équation caractéristique associée est: $r^2 + 2\zeta\omega_n \cdot r + \omega_n^2 = 0$. Il y a alors deux solutions pour r :

$$r_1 = -(\zeta\omega_n) + \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

$$r_2 = -(\zeta\omega_n) - \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

La solution générale est composée de la somme de deux termes correspondants:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t} \quad \text{avec } C_1 \text{ et } C_2: \text{ constantes} \quad (2.11)$$

Selon la valeur du paramètre ζ , trois cas d'amortissement différents doivent être distingués:

- 1) amortissement faible: $\zeta < 1$
- 2) amortissement fort: $\zeta > 1$
- 3) amortissement critique: $\zeta = 1$

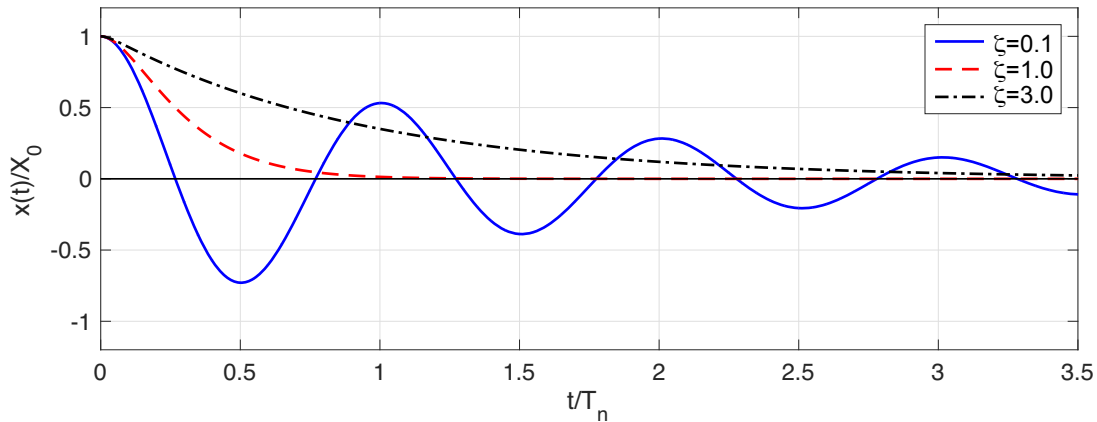


Figure 2.8: Selon la valeur du paramètre ζ , les oscillations peuvent être de type amortissement faible ($\zeta < 1$), amortissement fort ($\zeta > 1$) ou bien amortissement critique ($\zeta = 1$).

2.3.4 Amortissement faible: $\zeta < 1$

Dans ce cas, les racines r_1 et r_2 sont complexes car le terme $((\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2)$ est négatif. En posant:

$$\omega_D = \sqrt{\omega_n^2 - (\zeta\omega_n)^2}$$

les racines r_1 et r_2 peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$r_1 = -(\zeta\omega_n) + i\omega_D$$

$$r_2 = -(\zeta\omega_n) - i\omega_D$$

La solution générale s'écrit alors:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(-(\zeta\omega_n) + i\omega_D)t} + C_2 \cdot e^{(-(\zeta\omega_n) - i\omega_D)t} =$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot [(C_1 + C_2) \cdot \cos\omega_D t + (C_1 - C_2) \cdot i \cdot \sin\omega_D t] \quad (2.12)$$

Les termes $C_1 + C_2$ et $(C_1 - C_2) \cdot i$ peuvent être remplacés par les constantes $C = C_1 + C_2$ et $D = (C_1 - C_2) \cdot i$.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot (C \cdot \cos\omega_D t + D \cdot \sin\omega_D t) \quad (2.13)$$

Les constantes C et D sont déterminées par les conditions initiales.

La pseudo-pulsation (ω_D) est définie à partir de ω_n et de ζ par: $\omega_D = \sqrt{\omega_n^2 - (\zeta\omega_n)^2} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Solutions en fonction des conditions initiales (X_0 et V_0 en $t=0$)

En $t=0$, le terme du sinus disparaît et le terme du cosinus prend une valeur unitaire. Par conséquent, la valeur de la constante C est égale au déplacement initial (X_0): $C = X_0$

L'expression de la vitesse s'obtient par la dérivée de l'équation (2.13):

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} (C \cdot \cos\omega_D t + D \cdot \sin\omega_D t) + e^{-\zeta\omega_n t} (D \cdot \omega_D \cdot \cos\omega_D t - C \cdot \omega_D \cdot \sin\omega_D t) \quad (2.14)$$

En $t=0$, les termes en sinus disparaissent et les termes en cosinus prennent une valeur unitaire. La constante D s'exprime alors:

$$V_0 = -\zeta\omega_n \cdot (C) + D \cdot \omega_D = -\zeta\omega_n \cdot X_0 + D \cdot \omega_D \Rightarrow D = \frac{V_0 + \zeta\omega_n X_0}{\omega_D}$$

La prise en compte des conditions initiales conduit donc à l'expression suivante:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \left(X_0 \cdot \cos\omega_D t + \frac{V_0 + \zeta\omega_n X_0}{\omega_D} \cdot \sin\omega_D t \right) \quad (2.15)$$

La solution générale peut également être exprimée par une formulation alternative avec un cosinus:

$$x(t) = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \zeta\omega_n X_0}{\omega_D} \right)^2} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \cos\left(\omega_D t - \operatorname{atan}\left(\frac{V_0 + \zeta\omega_n X_0}{\omega_D X_0} \right) \right) \quad (2.16)$$

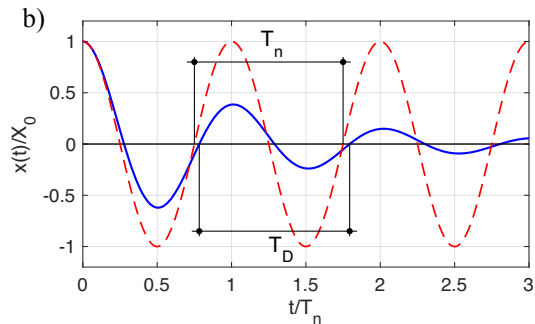
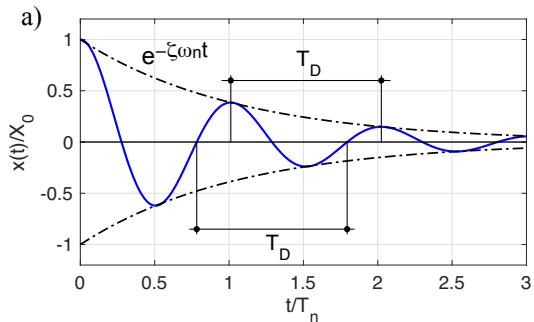


Figure 2.9: Les oscillations amorties sont caractérisées par un déplacement se répétant indéfiniment avec une pseudo-période $T_D = 2\pi/\omega_D$, mais s'atténuant progressivement selon une enveloppe exponentielle (a). L'amortissement tend à allonger faiblement la période des oscillations par rapport à celle des oscillations non amorties (b).

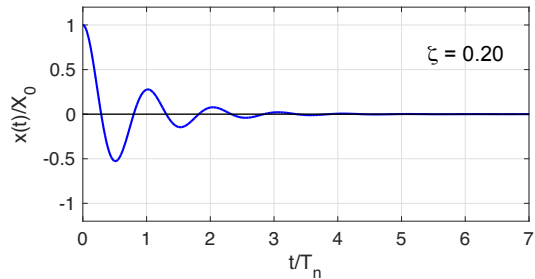
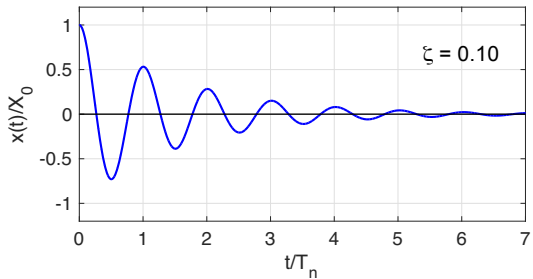
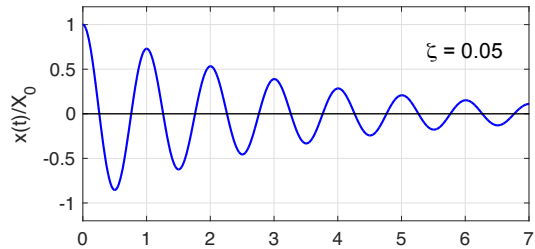
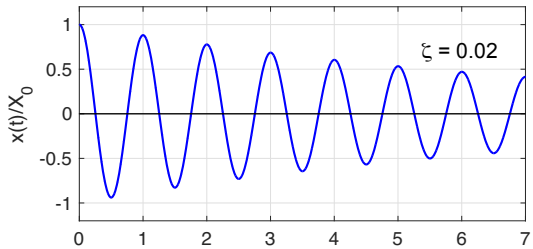


Figure 2.10: Le coefficient d'amortissement (ζ) décrit la rapidité d'atténuation de l'amplitude des oscillations.

2.3.5 Décroissement logarithmique

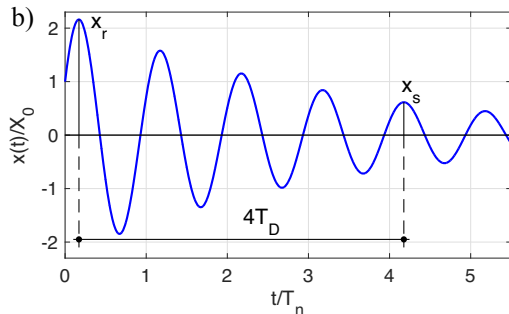
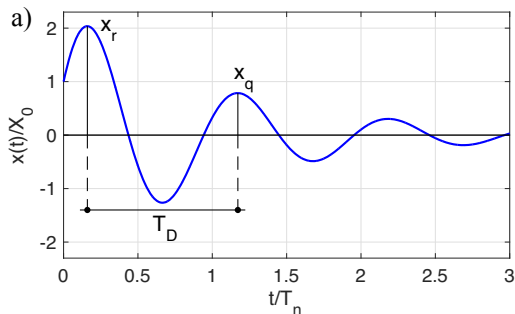


Figure 2.11: Le décroissement logarithmique permet l'estimation du coefficient d'amortissement.

En prenant deux maxima successifs (x_r et x_q) des oscillations (espacés d'une pseudo-période, T_D):

$$x_r = A \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \quad \text{et} \quad x_q = A \cdot e^{-\zeta \omega_n (t + T_D)} = A \cdot e^{-\zeta \omega_n \left(t + \frac{2\pi}{\omega_D} \right)}$$

Le décrément logarithmique (Δ) est le logarithme du rapport de ces deux maxima:

$$\Delta = \text{Log}\left(\frac{x_r}{x_q}\right) = \frac{2\pi\zeta\omega_n}{\omega_D} \approx 2\pi\zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta \approx \frac{\Delta}{2\pi}$$

L'approximation d'un amortissement faible ($\omega_D \approx \omega_n$) permet l'estimation du coefficient d'amortissement (ζ).

La généralisation où les maxima sont séparés par plus d'une pseudo-période ($n \cdot T_D$) est immédiate et on obtient: $\zeta \approx \Delta / (2\pi n)$.

Cette dernière relation peut être inversée pour extraire le nombre d'oscillations ($n_{50\%}$) nécessaires pour réduire l'amplitude de moitié: $n_{50\%} = \text{Log}2 / (2\pi\zeta) \approx 11 / \zeta[\%]$.

Pour un amortissement de $\zeta=5\%$, il faut 2.2 cycles pour diminuer l'amplitude de moitié.

2.3.6 Amortissement fort: $\zeta > 1$

Dans ce cas les racines r_1 et r_2 sont réelles car le terme $((\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2)$ est positif. En posant:

$$\hat{\omega}_D = \omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

les racines r_1 et r_2 peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$r_1 = -(\zeta\omega_n) + \hat{\omega}_D$$

$$r_2 = -(\zeta\omega_n) - \hat{\omega}_D$$

En prenant en compte les conditions initiales (X_0 et V_0 en $t=0$), on obtient l'expression:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \left(X_0 \cdot \cosh \hat{\omega}_D t + \frac{V_0 + \zeta\omega_n X_0}{\hat{\omega}_D} \cdot \sinh \hat{\omega}_D t \right) \quad (2.19)$$

La formulation est similaire à celle de l'équation (2.15), sauf que les fonctions trigonométriques ont été remplacées par leurs analogues hyperboliques. D'un point de vue dynamique, il n'y a pas de vibrations, le système s'approche lentement de sa position d'équilibre.

2.3.7 Amortissement critique: $\zeta=1$

Dans ce cas les racines r_1 et r_2 sont réelles et égales ($r_1=r_2=-\omega_n$), car le terme $((\zeta\omega_n)^2-\omega_n^2)$ est nul. La solution générale s'écrit alors:

$$x(t) = e^{-\omega_n t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) \quad (2.20)$$

Avec les conditions initiales (X_0 et V_0 en $t=0$), on obtient l'expression:

$$x(t) = e^{-\omega_n t} \cdot [X_0 + (V_0 + \omega_n X_0) \cdot t] \quad (2.21)$$

Comme dans le cas de l'amortissement fort, il n'y a pas de vibrations, mais le système s'approche rapidement de sa position d'équilibre.

2.4 Oscillations entretenues (ou forcées)

Les oscillations entretenues concernent les systèmes dans lesquelles les vibrations sont engendrées par une force extérieure harmonique.

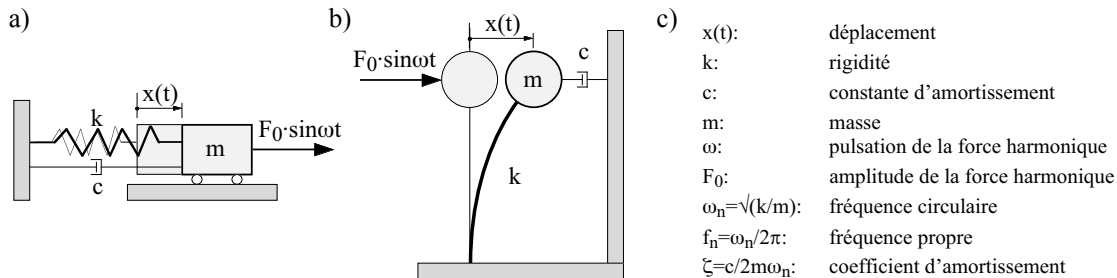


Figure 2.13: Oscillateur simple amorti soumis à une force harmonique. Représentation mécanique (a), représentation orientée structure (b) et définitions (c).

2.4.1 Equation différentielle

L'équation différentielle s'établit à partir des forces agissant sur la masse.

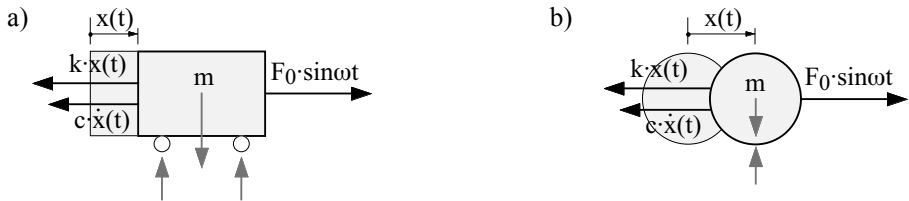


Figure 2.14: Forces agissant sur la masse pour un oscillateur simple amorti soumis à une force harmonique.

Suivant la deuxième loi de *Newton*, l'équation du mouvement s'exprime:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \sin \omega t \quad (2.22)$$

après division par m , on obtient l'expression épurée suivante:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \cdot \dot{x} + \omega_n^2 \cdot x = F_0/m \cdot \sin \omega t \quad (2.23)$$

2.4.2 Résolution

La solution générale, somme: solution homogène (x_h) + solution particulière (x_p): $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

La solution homogène s'exprime de la manière suivante:

$$x_h(t) = C \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \cos(\omega_D t - \phi_1)$$

La solution particulière est de la forme:

$$x_p(t) = D \cdot \sin(\omega t - \phi_2)$$

La solution générale s'exprime:

$$x(t) = C \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \cos(\omega_D t - \phi_1) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \operatorname{atan}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)\right) \quad (2.24)$$

On détermine les constantes C et ϕ_1 avec les conditions initiales (généralement $X_0=0$ et $V_0=0$ en $t=0$).

La réponse totale de l'oscillateur simple est composée de deux sinusoïdes oscillant à des fréquences distinctes: une sinusoïde de base (à l'équilibre) à la fréquence de la force perturbatrice à laquelle s'ajoute une sinusoïde à la fréquence propre de l'oscillateur. La sinusoïde de base (à l'équilibre) correspond à la solution particulière (x_p) et la sinusoïde à la fréquence propre de l'oscillateur correspond à la solution homogène (x_h). L'amortissement (même faible) a pour effet de faire disparaître la solution homogène après quelques oscillations alors que cette solution persiste indéfiniment en absence d'amortissement.

Pour des raisons didactiques, les graphiques sont souvent tracés pour une vitesse initiale importante afin de bien mettre en évidence les deux sinusoïdes dont la réponse totale est composée. Avec une vitesse initiale nulle ($V_0=0$ en $t=0$) l'effet est moins spectaculaire. Ce cas est toutefois plus réaliste et il montre que la différence entre réponse totale et réponse à l'équilibre n'est généralement pas aussi importante, même sans amortissement.

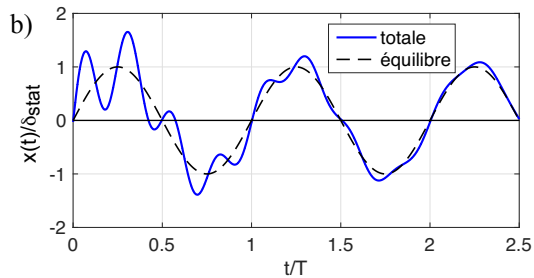
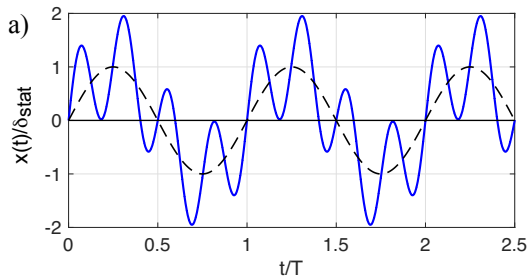
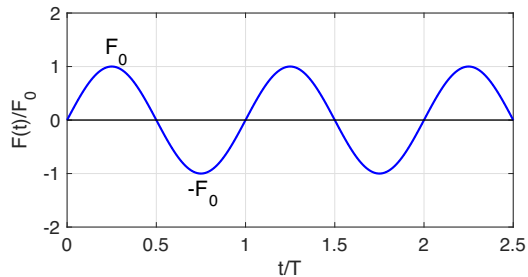
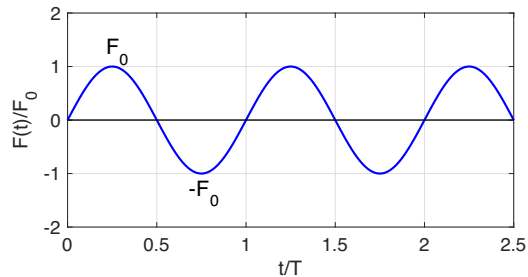


Figure 2.15: La réponse totale se compose de deux sinusoïdes avec des fréquences différentes.

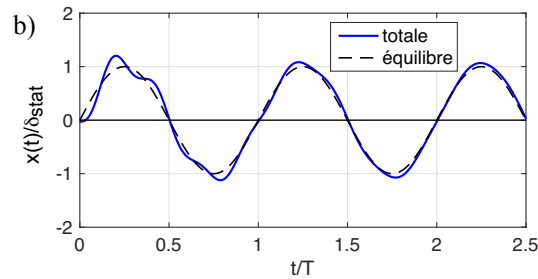
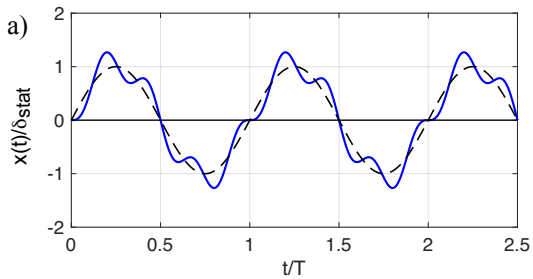
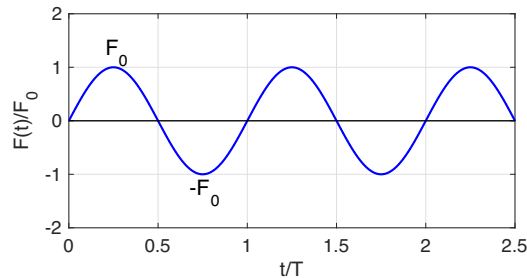
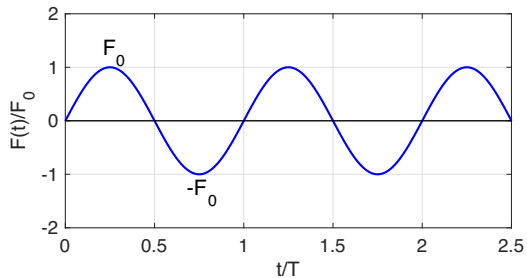


Figure 2.16: Avec $V_0 = 0$, la réponse totale s'éloigne peu de la réponse à l'équilibre, même sans amortissement.

Le premier terme de la solution générale représente la solution homogène qui disparaît après quelques oscillations amorties. Le deuxième terme persiste indéfiniment et représente la solution particulière à la fréquence de la force perturbatrice. La fraction devant le sinus correspond à l'amplification dynamique de la force F_0 .

R_d est le facteur d'amplification dynamique de l'application harmonique de la force F_0 à la pulsation ω :

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.25)$$

Sans amortissement, R_d tend vers l'infini pour $\omega/\omega_n=1$. C'est la résonance. Avec amortissement, les déplacements ne sont plus infinis et R_d vaut $R_d=1/(2\zeta)$ pour $\omega/\omega_n=1$. Le pic du facteur d'amplification apparaît cependant pour un rapport des fréquences un peu plus petit, mais proche de l'unité:

$$R_{d, \max} = \frac{1}{2\zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

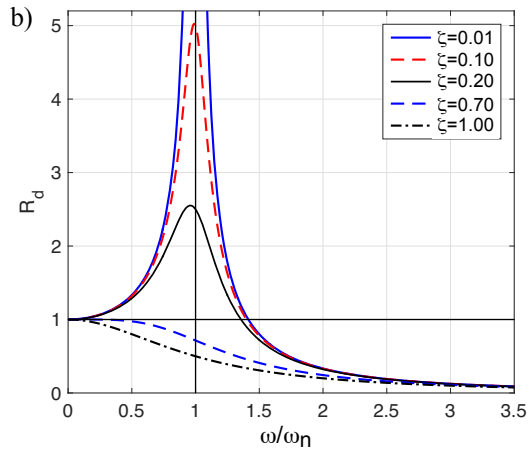
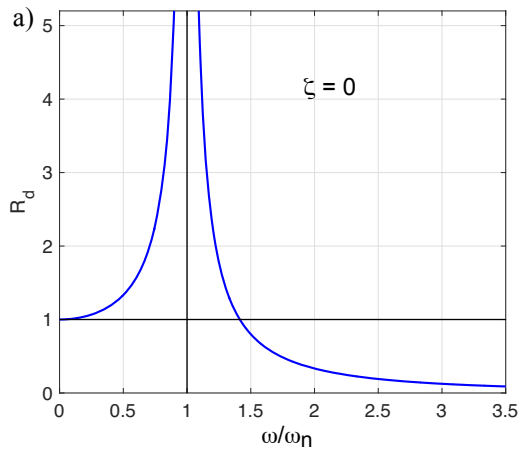
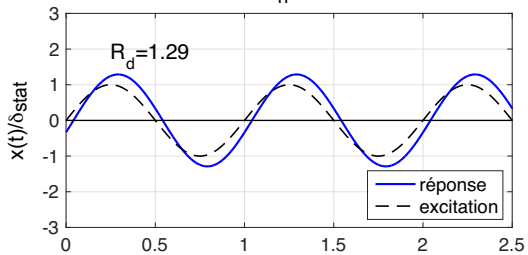
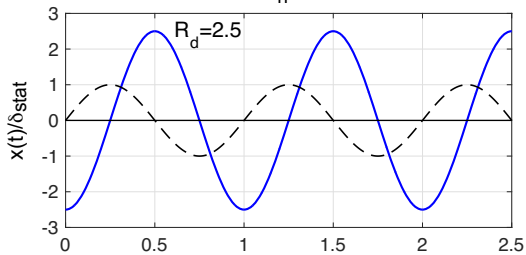
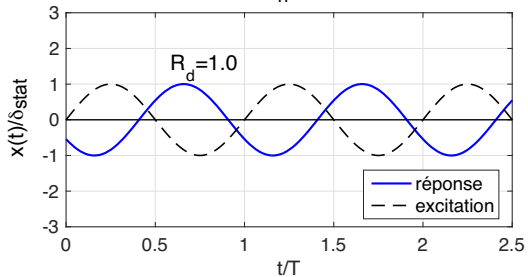
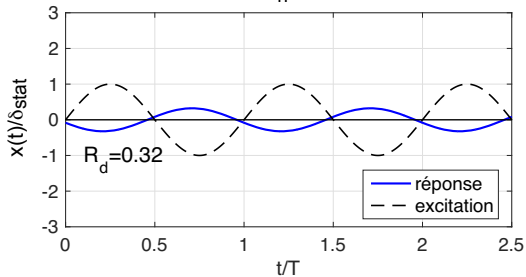


Figure 2.17: Facteur d'amplification dynamique (R_d) en fonction du rapport de la fréquence de la force perturbatrice et de la fréquence propre de la structure; sans amortissement (a) et avec amortissement (b).

$\omega/\omega_\eta=0.5$  $\omega/\omega_\eta=1.0$  $\omega/\omega_\eta=1.356$  $\omega/\omega_\eta=2.0$ 

2.4.4 Résonance

Le phénomène de résonance apparaît lorsque les fréquences coïncident ($\omega = \omega_n$).

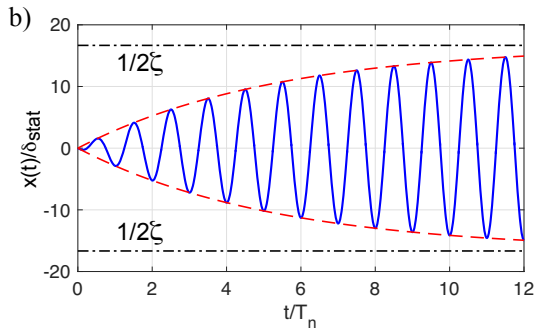
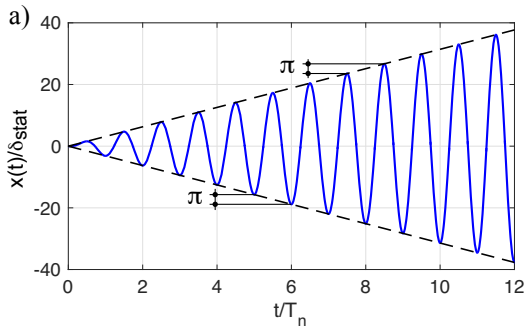


Figure 2.19: La résonance apparaît lorsqu'un oscillateur non amorti est soumis à une force harmonique variant à une fréquence égale à la fréquence propre de celui-ci. A chaque cycle, l'amplitude des déplacements augmente régulièrement d'un incrément de $2 \cdot \pi \cdot \delta_{\text{stat}}$ (a). En présence d'amortissement, l'augmentation est bornée (b).

Sans amortissement:

$$x(t) = \frac{F_0}{2k} \cdot (\sin \omega_n t - \omega_n t \cdot \cos \omega_n t) = \frac{\delta_{\text{stat}}}{2} \cdot (\sin \omega_n t - \omega_n t \cdot \cos \omega_n t) \quad (2.26)$$

Avec amortissement:

$$x(t) = \frac{\delta_{\text{stat}}}{2\xi} \cdot \left[e^{-\xi \omega_n t} \cdot \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin \omega_D t \right) - \cos \omega_n t \right] \quad (2.27)$$

Cette équation se simplifie si l'on considère un amortissement faible, car le terme en sinus peut être négligé. Par ailleurs, les fréquences sont proches ($\omega_D \approx \omega_n$). On obtient:

$$x(t) \approx \frac{\delta_{\text{stat}}}{2\xi} \cdot \left[\left(e^{-\xi \omega_n t} - 1 \right) \cdot \cos \omega_n t \right]$$

Les oscillations se développent avec le temps selon un cosinus dont l'amplitude est modulée par une enveloppe de type exponentiel. Le déplacement maximum n'est pas infini. Il est borné par un facteur qui est en fonction inverse de l'amortissement.