

4.5 Mouvement de la fondation

Oscillateur multiple soumis à une excitation de sa base (accélération prescrite):

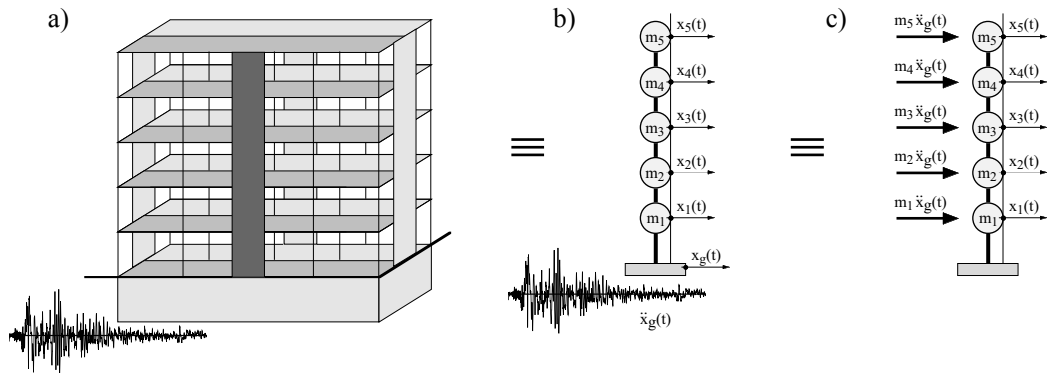


Figure 4.21: Bâtiment de cinq étages stabilisé par des refends en béton armé (a) et sa modélisation “en brochette” par un oscillateur à cinq masses concentrées (b). Pour la détermination des déplacements relatifs, la sollicitation sismique à la base peut être remplacée par une force d’inertie à chaque étage (c).

4.5.1 Equation du mouvement dans la cas sismique

L'application de l'équation du mouvement à chaque étage conduit au système d'équations suivant:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot \dot{x}_1 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 + k_{13} \cdot x_3 + k_{14} \cdot x_4 + k_{15} \cdot x_5 = -m_1 \cdot \ddot{x}_g$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c \cdot \dot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 + k_{23} \cdot x_3 + k_{24} \cdot x_4 + k_{25} \cdot x_5 = -m_2 \cdot \ddot{x}_g$$

$$m_3 \cdot \ddot{x}_3 + c \cdot \dot{x}_3 + k_{31} \cdot x_1 + k_{32} \cdot x_2 + k_{33} \cdot x_3 + k_{34} \cdot x_4 + k_{35} \cdot x_5 = -m_3 \cdot \ddot{x}_g$$

$$m_4 \cdot \ddot{x}_4 + c \cdot \dot{x}_4 + k_{41} \cdot x_1 + k_{42} \cdot x_2 + k_{43} \cdot x_3 + k_{44} \cdot x_4 + k_{45} \cdot x_5 = -m_4 \cdot \ddot{x}_g$$

$$m_5 \cdot \ddot{x}_5 + c \cdot \dot{x}_5 + k_{51} \cdot x_1 + k_{52} \cdot x_2 + k_{53} \cdot x_3 + k_{54} \cdot x_4 + k_{55} \cdot x_5 = -m_5 \cdot \ddot{x}_g$$

Ce système d'équations s'écrit plus simplement sous forme matricielle:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{x}}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{x}}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{x}} = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{e}}_x \cdot \underline{\underline{\ddot{x}}}_g \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \ddot{x}_g$$

4.5.2 Matrices et vecteurs

La matrice des masses doit être multipliée par le vecteur direction \underline{e}_x :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \ddot{x}_g = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix} \cdot \ddot{x}_g$$

$\underline{\mathbf{M}}$ est la matrice des masses, $\underline{\mathbf{K}}$ la matrice de rigidité et $\underline{\mathbf{x}}$ le vecteur des déplacements relatifs:

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

4.6 Analyse modale dans le cas sismique

L'analyse modale utilise les propriétés des modes propres. L'orthogonalité des modes permet de découpler le système d'équations du mouvement.

4.6.1 Découplage

Les modes propres s'obtiennent en annulant le déterminant du système: $\left| \underline{\mathbf{K}} - \omega_n^2 \cdot \underline{\mathbf{M}} \right| = 0$.

Conformément à l'équ. (4.5), les déplacements relatifs (x_j) peuvent alors s'exprimer en coordonnées modales (z_n) par le changement de variables suivant:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \underline{A} \cdot \underline{z} = \sum_{n=1}^5 \underline{A}_n \cdot z_n \quad (4.14)$$

où \underline{A}_n sont les vecteurs propres, \underline{z} les coordonnées modales et \underline{A} la matrice des vecteurs modaux.

4.6.2 Facteurs de participation

En prémultipliant par \underline{A}^T , l'équation du mouvement (4.13) devient:

$$\underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{A} \cdot \ddot{\underline{z}} + \underline{A}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{A} \cdot \dot{\underline{z}} + \underline{A}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{A} \cdot \underline{z} = -\underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_x \cdot \ddot{x}_g = -\underline{r} \cdot \ddot{x}_g \quad (4.15)$$

où \underline{r} est le vecteur des facteurs de participation:

$$\underline{r} = \underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_x = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{54} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \cdot m_1 + A_{21} \cdot m_2 + A_{31} \cdot m_3 + A_{41} \cdot m_4 + A_{51} \cdot m_5 \\ A_{12} \cdot m_1 + A_{22} \cdot m_2 + A_{32} \cdot m_3 + A_{42} \cdot m_4 + A_{52} \cdot m_5 \\ A_{13} \cdot m_1 + A_{23} \cdot m_2 + A_{33} \cdot m_3 + A_{43} \cdot m_4 + A_{53} \cdot m_5 \\ A_{14} \cdot m_1 + A_{24} \cdot m_2 + A_{34} \cdot m_3 + A_{44} \cdot m_4 + A_{54} \cdot m_5 \\ A_{15} \cdot m_1 + A_{25} \cdot m_2 + A_{35} \cdot m_3 + A_{45} \cdot m_4 + A_{55} \cdot m_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum A_{j1} \cdot m_j \\ \sum A_{j2} \cdot m_j \\ \sum A_{j3} \cdot m_j \\ \sum A_{j4} \cdot m_j \\ \sum A_{j5} \cdot m_j \end{bmatrix}$$

4.6.3 Grandeurs généralisées

En raison de l'orthogonalité des modes, les matrices résultantes sont diagonales (grandeurs généralisées). La matrice des masses généralisées ($\underline{\underline{M}}^*$), la matrice de rigidité généralisée ($\underline{\underline{K}}^*$) et la matrice d'amortissement généralisé ($\underline{\underline{C}}^*$) sont données par:

$$\underline{\underline{M}}^* = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{K}}^* = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

Développées, la matrice des masses généralisées et la matrice de rigidité généralisée deviennent:

$$\underline{\underline{M}}^* = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^* = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5^* \end{bmatrix}$$

Plus en détail, les éléments de la matrice des masses généralisées s'expriment par:

$$\underline{m}_n^* = \text{diag}(\underline{M}^*) = \begin{bmatrix} A_{11}^2 \cdot m_1 + A_{21}^2 \cdot m_2 + A_{31}^2 \cdot m_3 + A_{41}^2 \cdot m_4 + A_{51}^2 \cdot m_5 \\ A_{12}^2 \cdot m_1 + A_{22}^2 \cdot m_2 + A_{32}^2 \cdot m_3 + A_{42}^2 \cdot m_4 + A_{52}^2 \cdot m_5 \\ A_{13}^2 \cdot m_1 + A_{23}^2 \cdot m_2 + A_{33}^2 \cdot m_3 + A_{43}^2 \cdot m_4 + A_{53}^2 \cdot m_5 \\ A_{14}^2 \cdot m_1 + A_{24}^2 \cdot m_2 + A_{34}^2 \cdot m_3 + A_{44}^2 \cdot m_4 + A_{54}^2 \cdot m_5 \\ A_{15}^2 \cdot m_1 + A_{25}^2 \cdot m_2 + A_{35}^2 \cdot m_3 + A_{45}^2 \cdot m_4 + A_{55}^2 \cdot m_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum A_{j1}^2 \cdot m_j \\ \sum A_{j2}^2 \cdot m_j \\ \sum A_{j3}^2 \cdot m_j \\ \sum A_{j4}^2 \cdot m_j \\ \sum A_{j5}^2 \cdot m_j \end{bmatrix}$$

Le système d'équations (4.15) se simplifie alors:

$$\underline{M}^* \cdot \ddot{\underline{z}} + \underline{C}^* \cdot \dot{\underline{z}} + \underline{K}^* \cdot \underline{z} = -\underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_{-x} \cdot \ddot{\underline{x}}_g = -\underline{r} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (4.16)$$

La n^{ième} ligne de l'équation du mouvement en coordonnées modales s'écrit:

$$m_n^* \cdot \ddot{z}_n + c_n^* \cdot \dot{z}_n + k_n^* \cdot z_n = -r_n \cdot \ddot{x}_g \quad (4.17)$$

ou bien après division par la masse généralisée correspondante m_n^* :

$$\frac{m_n^*}{m_n^*} \cdot \ddot{z}_n + \frac{c_n^*}{m_n^*} \cdot \dot{z}_n + \frac{k_n^*}{m_n^*} \cdot z_n = \ddot{z}_n + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{z}_n + \omega_n^2 \cdot z_n = -\frac{r_n}{m_n^*} \cdot \ddot{x}_g \quad (4.18)$$

A l'exception de la modification de l'amplitude de l'accélération du sol par le facteur de participation modal (r_n/m_n^*), on retrouve l'équation de l'oscillateur simple.

4.6.4 Amortissement modal

Une alternative à l'amortissement de *Rayleigh* pour garantir un amortissement classique consiste à spécifier directement l'amortissement au niveau de l'équation (4.18), sans s'occuper de son expression générale dans l'équation (4.13). Cette option radicale simplifie notablement la considération de l'amortissement et permet de spécifier un coefficient d'amortissement constant pour tous les modes.

4.6.5 Résolution

Dans l'analyse modale, l'oscillateur multiple est donc décomposé en une somme d'oscillateurs simples indépendants (orthogonalité des modes). Il faut cependant bien noter l'influence des facteurs de participation modaux qui modifient l'amplitude de l'accélération du sol à considérer:

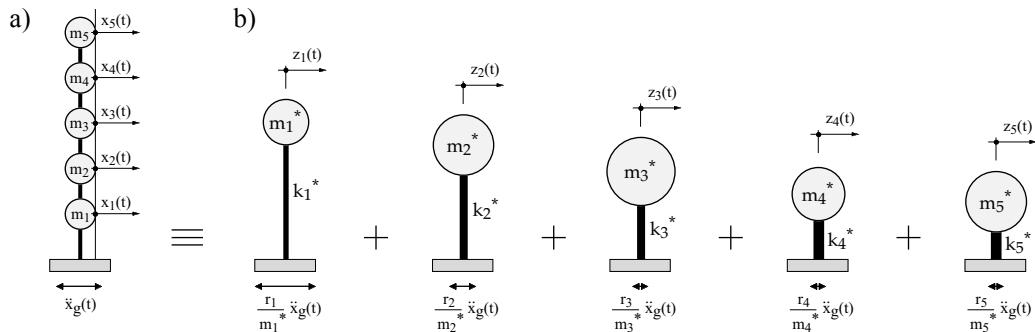
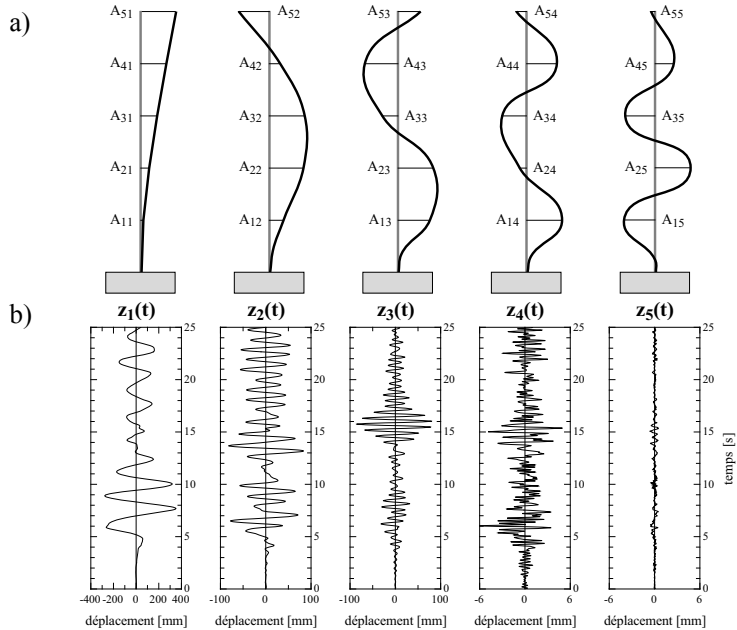


Figure 4.22: Décomposition modale: l'oscillateur multiple (a) est décomposé en une somme d'oscillateurs simples indépendants (b). Notons que l'accélération du sol est modulée par les facteurs de participation modaux (r_n/m_n^*).

Concrètement, la réponse modale s'obtient en résolvant l'équation (4.18) numériquement par une des méthodes déjà vue avec les oscillateurs simples, par exemple. Les déplacements relatifs sont ensuite déterminés par la superposition des réponses modales de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \\ A_{51} \end{bmatrix} \cdot z_1(t) + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \\ A_{52} \end{bmatrix} \cdot z_2(t) + \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \\ A_{43} \\ A_{53} \end{bmatrix} \cdot z_3(t) + \begin{bmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \\ A_{44} \\ A_{54} \end{bmatrix} \cdot z_4(t) + \begin{bmatrix} A_{15} \\ A_{25} \\ A_{35} \\ A_{45} \\ A_{55} \end{bmatrix} \cdot z_5(t)$$



4.6.6 Grandeurs modales (masse et hauteur)

Masse modale

La masse modale permet de quantifier a priori la contribution de chaque mode dans la réponse totale:

$$m_{\text{mod}, n} = \left(\frac{r_n}{m_n^*} \right)^2 \cdot m_n^* = \frac{\left(\sum_{j=1}^N A_{jn} \cdot m_j \right)^2}{\sum_{j=1}^N A_{jn}^2 \cdot m_j} \quad (4.19)$$

Contrairement au facteur de participation et à la masse généralisée, la valeur de la masse modale ne dépend pas de la normalisation des modes. Dans chaque mode, elle correspond à l'effort tranchant à la base de l'oscillateur multiple. La somme des masses modales est égale à la somme des masses et cette grandeur permet d'établir un critère pour fixer le nombre de modes à prendre en compte dans l'analyse modale de manière à garantir la précision de la réponse (généralement 90% de la masse totale):

$$\sum_{n=1}^N m_{\text{mod}, n} = \sum_{n=1}^N m_n \quad (4.20)$$

Hauteur modale

La hauteur modale est définie de la manière suivante:

$$H_n^* = \frac{\underline{A}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{H}}{\underline{A}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{A}_n} = \frac{\sum A_{jn} \cdot H_j \cdot m_j}{\sum A_{jn} \cdot m_j} \quad (4.25)$$

H_j est la hauteur de la masse de l'étage j par rapport à la base (ou bien l'altitude de la masse m_j)

La hauteur modale est la hauteur de l'oscillateur simple indépendant qui correspond à chaque mode. C'est la hauteur par rapport à la base (ou l'altitude) où doit être placée la masse modale de manière à retrouver, dans chaque mode, le moment de flexion maximal à la base.

4.6.7 Exemple du cadre bi-encasté à deux étages avec traverses infiniment rigides

Avec le cadre à deux étages on peut vérifier les relations ci-dessus. Les matrices ont déjà été établies:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ce cadre est soumis à une excitation sismique (accélération prescrite), le vecteur des facteurs de participation (\underline{r}) s'exprime:

$$\underline{r} = \underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_{-x} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m \\ -2m & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m \\ -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot m$$

Au passage, on remarque que selon la normalisation des modes adoptée, les facteurs de participation peuvent être négatifs. La matrice des masses généralisées (\underline{M}^*) s'exprime de la manière suivante:

$$\underline{M}^* = \underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m \\ -2m & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}$$

Les facteurs de participation modaux (r_n/m_n^*) s'expriment de la manière suivante:

$$\frac{r_1}{m_1^*} = \frac{2m}{1.5m} = \frac{4}{3} \qquad \frac{r_2}{m_2^*} = \frac{-m}{3m} = -\frac{1}{3}$$

Les masses modales ($m_{\text{mod},n}$) sont égales à:

$$m_{\text{mod},1} = \left(\frac{r_1}{m_1^*} \right)^2 \cdot m_1^* = \left(\frac{4}{3} \right)^2 \cdot 1.5m = \frac{8}{3}m$$

$$m_{\text{mod},2} = \left(\frac{r_2}{m_2^*} \right)^2 \cdot m_2^* = \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \cdot 3m = \frac{1}{3}m$$

La somme des masses modales vaut effectivement la somme des masses d'étage ($\sum m_n = 3m$). On peut également vérifier la relation de l'équation (4.21):

$$\sum_{n=1}^N \frac{r_n}{m_n^*} \cdot \underline{A}_n = \frac{4}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{e}_x$$

4.7 Exemple numérique

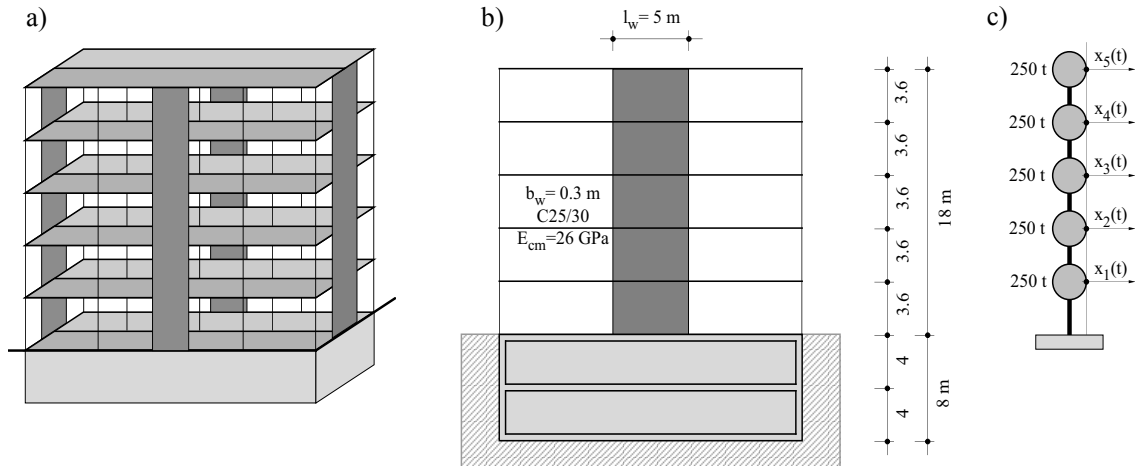


Figure 4.24: Bâtiment régulier de cinq étages (a). Dans chaque direction, il est stabilisé latéralement par deux refends en béton armé (b). La modélisation habituelle conduit à un oscillateur multiple régulier à cinq masses (c).

La matrice des masses $\underline{\underline{M}}$ et la matrice de flexibilité $\hat{\underline{\underline{f}}}$ s'expriment de la manière suivante:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot m \qquad \hat{\underline{\underline{f}}} = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ est déterminée en inversant la matrice de flexibilité $\hat{\underline{\underline{f}}}$:

$$\underline{\underline{K}} = \hat{\underline{\underline{f}}}^{-1} = \frac{6 \cdot EI}{h^3} \cdot \begin{bmatrix} 3.1381 & -1.9834 & 0.7956 & -0.1989 & 0.0331 \\ -1.9834 & 2.4420 & -1.7845 & 0.6961 & -0.1160 \\ 0.7956 & -1.7845 & 2.3425 & -1.5856 & 0.4309 \\ -0.1989 & 0.6961 & -1.5856 & 1.6464 & -0.6077 \\ 0.0331 & -0.1160 & 0.4309 & -0.6077 & 0.2680 \end{bmatrix}$$

Les modes propres s'obtiennent en résolvant le problème aux valeurs propres et sont ensuite réunis dans la matrice des vecteurs modaux \underline{A} :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.39 & 0.90 & 1.00 & -0.91 \\ 0.22 & 0.96 & 1.00 & -0.21 & 1.00 \\ 0.45 & 1.00 & -0.47 & -0.72 & -0.88 \\ 0.72 & 0.29 & -0.97 & 0.85 & 0.52 \\ 1.00 & -0.90 & 0.63 & -0.31 & -0.14 \end{bmatrix}$$

La matrice des masses généralisées \underline{M}^* est déterminée par la relation: $\underline{M}^* = \underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{A}$ ou:

$$\underline{M}^* = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.22 & 0.45 & 0.72 & 1.00 \\ 0.39 & 0.96 & 1.00 & 0.29 & -0.90 \\ 0.90 & 1.00 & -0.47 & -0.97 & 0.63 \\ 1.00 & -0.21 & -0.72 & 0.85 & -0.31 \\ -0.91 & 1.00 & -0.88 & 0.52 & -0.14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.06 & 0.39 & 0.90 & 1.00 & -0.91 \\ 0.22 & 0.96 & 1.00 & -0.21 & 1.00 \\ 0.45 & 1.00 & -0.47 & -0.72 & -0.88 \\ 0.72 & 0.29 & -0.97 & 0.85 & 0.52 \\ 1.00 & -0.90 & 0.63 & -0.31 & -0.14 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}^* = \begin{bmatrix} 1.771 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.971 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.371 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.381 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.895 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 442.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 742.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 842.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 595.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 723.7 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ [kg]}$$

La matrice de rigidité généralisée $\underline{\underline{K}}^*$ est déterminée de manière analogue: $\underline{\underline{K}}^* = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{K}}^* = \frac{6 \cdot EI}{h^3} \cdot \begin{bmatrix} 0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2769 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5228 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.6539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17.9430 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des facteurs de participation \underline{r} est donné par:

$$\underline{r} = \underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_x = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.22 & 0.45 & 0.72 & 1.00 \\ 0.39 & 0.96 & 1.00 & 0.29 & -0.90 \\ 0.90 & 1.00 & -0.47 & -0.97 & 0.63 \\ 1.00 & -0.21 & -0.72 & 0.85 & -0.31 \\ -0.91 & 1.00 & -0.88 & 0.52 & -0.14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.452 \\ 1.751 \\ 1.087 \\ 0.626 \\ -0.416 \end{bmatrix} \cdot \text{m} = \begin{bmatrix} 613.0 \\ 437.7 \\ 271.7 \\ 156.6 \\ -103.9 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \quad [\text{kg}]$$

Les facteurs de participation modaux sont obtenus après division de chaque élément de \underline{r} par la masse généralisée correspondante:

$$\frac{r_n}{m_n^*} = \begin{bmatrix} 2.452/1.771 \\ 1.751/2.971 \\ 1.087/3.371 \\ 0.626/2.381 \\ -0.416/2.895 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.384 \\ 0.589 \\ 0.322 \\ 0.263 \\ -0.144 \end{bmatrix}$$

Les masses modales effectives sont données par:

$$m_{\text{mod}, n} = \left(\frac{r_n}{m_n^*} \right)^2 \cdot m_n^* = \begin{bmatrix} 2.452^2 / 1.771 \\ 1.751^2 / 2.971 \\ 1.087^2 / 3.371 \\ 0.626^2 / 2.381 \\ -0.416^2 / 2.895 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 3.395 \\ 1.032 \\ 0.351 \\ 0.165 \\ 0.060 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 848.4 \\ 257.9 \\ 87.6 \\ 41.2 \\ 14.9 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ [kg]}$$

Finalement, on peut vérifier la relation de l'équation (4.21):

$$\sum_{n=1}^5 \frac{r_n}{m_n^*} \cdot \underline{A}_n = 1.384 \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.22 \\ 0.45 \\ 0.72 \\ 1.00 \end{bmatrix} + 0.589 \begin{bmatrix} 0.39 \\ 0.96 \\ 1.00 \\ 0.29 \\ -0.90 \end{bmatrix} + 0.322 \begin{bmatrix} 0.90 \\ 1.00 \\ -0.47 \\ -0.97 \\ 0.63 \end{bmatrix} + 0.263 \begin{bmatrix} 1.00 \\ -0.21 \\ -0.72 \\ 0.85 \\ -0.31 \end{bmatrix} - 0.144 \begin{bmatrix} -0.91 \\ 1.00 \\ -0.88 \\ 0.52 \\ -0.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour la détermination des hauteurs modales, il faut d'abord calculer le numérateur:

$$\underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{H} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.22 & 0.45 & 0.72 & 1.00 \\ 0.39 & 0.96 & 1.00 & 0.29 & -0.90 \\ 0.90 & 1.00 & -0.47 & -0.97 & 0.63 \\ 1.00 & -0.21 & -0.72 & 0.85 & -0.31 \\ -0.91 & 1.00 & -0.88 & 0.52 & -0.14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.6\text{m} \\ 7.2\text{m} \\ 10.8\text{m} \\ 14.4\text{m} \\ 18.0\text{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.024 \\ 7.183 \\ 2.741 \\ 1.181 \\ -0.675 \end{bmatrix} \cdot \text{m} = \begin{bmatrix} 8.756 \\ 1.796 \\ 0.685 \\ 0.295 \\ -0.169 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}]$$

Après division par le facteur de participation r_n correspondant, on obtient les hauteurs modales :

$$H_n^* = \begin{bmatrix} 35.024/2.452 \\ 7.183/1.751 \\ 2.741/1.087 \\ 1.181/0.626 \\ -0.675/-0.416 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.287 \\ 4.103 \\ 2.522 \\ 1.886 \\ 1.625 \end{bmatrix} \quad [\text{m}]$$

La hauteur modale du mode fondamental peut se déterminer directement avec le mode fondamental:

$$H_1^* = \frac{250 \cdot (0.06 \cdot 3.6 + 0.22 \cdot 7.2 + 0.45 \cdot 10.8 + 0.72 \cdot 14.4 + 1.0 \cdot 18)}{250 \cdot (0.06 + 0.22 + 0.45 + 0.72 + 1.0)} = \frac{35.028}{2.452} = 14.29 \quad [\text{m}]$$

Instructions MatLab

```
%*****  
% Matrices des masses et de la rigidite generalisees  
%*****  
Mgen=((phi)'*M*phi);  
Kgen=(phi)'*K*phi;  
%  
%*****  
% vecteur des facteurs de participation  
%*****  
r=(phi)'*M*diag(eye(n));  
rSm=r./diag(Mgen);  
%  
%*****  
% Masse modale  
%*****  
MasseMod=(diag(Mgen).*rSm.^2);  
%  
%*****  
% Hauteur modale  
%*****  
%  
Hmod=(phi)'*M*H'./r;
```


Pour déterminer les caractéristiques dynamiques, il faut utiliser les valeurs numériques:

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 9.775 \\ 62.416 \\ 176.85 \\ 341.77 \\ 508.99 \end{bmatrix} \text{ [rad/s]} \quad \underline{f} = \frac{1}{2\pi} \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 1.556 \\ 9.934 \\ 28.15 \\ 54.39 \\ 81.01 \end{bmatrix} \text{ [Hz]} \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} 0.643 \\ 0.101 \\ 0.036 \\ 0.018 \\ 0.012 \end{bmatrix} \text{ [s]}$$

Détermination de la période fondamentale à l'aide du quotient de Rayleigh

1) répartition linéaire sur la hauteur:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \hat{\underline{f}} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \\ 2F \\ 3F \\ 4F \\ 5F \end{bmatrix} = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 541 \\ 1090 \\ 1726 \\ 2396 \end{bmatrix} \cdot F$$

$$\sum_{j=1}^5 F_j \cdot x_j = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot 23386 \cdot F^2$$

$$\sum_{j=1}^5 m_j \cdot x_j^2 = \left(\frac{h^3}{6 \cdot EI} \right)^2 \cdot 10223173 \cdot m \cdot F^2$$

$$T_1 = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^5 m_j \cdot x_j^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^5 F_j \cdot x_j}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{10223173}{23386}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot h^3}{6 \cdot EI}} = 131.37 \cdot 4.8914 \cdot 10^{-3} = 0.643 \text{ [s]}$$

2) répartition constante sur la hauteur:

$$T_1 = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^5 m_j \cdot x_j^2}}{\sqrt{\sum_{j=1} F_j \cdot x_j}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{649418}{1496}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot h^3}{6 \cdot EI}} = 130.91 \cdot 4.8914 \cdot 10^{-3} = 0.640 \text{ [s]}$$

3) formule simplifiée:

$$x_N = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot 600 \cdot F = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot 600 \cdot m \cdot g = 0.144 \text{ [m]} \quad (\text{équ. (4.9), } F \text{ constantes égales à } m \cdot g)$$

$$T_1[\text{s}] = 2 \cdot \sqrt{x_N[\text{m}]} = 2 \cdot \sqrt{0.144} = 0.759 \text{ [s]}$$

4) force unique concentrée au sommet:

$$\sum_{j=1}^5 m_j \cdot x_j^2 = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot 250 \cdot F^2$$

$$\sum_{j=1}^5 m_j \cdot x_j^2 = \left(\frac{h^3}{6 \cdot EI} \right)^2 \cdot 108040 \cdot m \cdot F^2$$

$$T_1 = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^5 m_j \cdot x_j^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^5 F_j \cdot x_j}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{108040}{250}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot h^3}{6 \cdot EI}} = 130.62 \cdot 4.8914 \cdot 10^{-3} = 0.639 \text{ [s]}$$

Les résultats montrent que le calcul de la période fondamentale avec le *quotient de Rayleigh* livre des valeurs très proches de la valeur exacte (écarts de moins de 0.1%, 0.5% et moins de 0.7%). La formule simplifiée de l'équation (4.9) est clairement moins performante puisque l'écart correspondant est de 18% environ.