1.1.1 Degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté est le nombre minimum de coordonnées permettant de décrire les oscillations de la structure. Les structures peuvent être modélisées en considérant que les masses sont concentrées dans quelques éléments particuliers, comme les dalles d'étage des bâtiments, par exemple. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté par direction principale est égal au nombre d'étages.

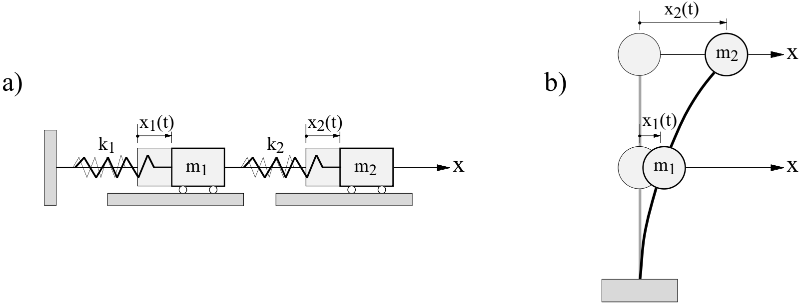


Figure 1.1: Deux exemples de structures à deux degrés de liberté. Les oscillations sont décrites par le déplacement horizontal des masses. Les coordonnées x_1 et x_2 sont repérées sur l'axe horizontal (positives de gauche à droite).

1.1.2 Types de mouvements oscillatoires

Régime harmonique

Le régime harmonique est le mouvement oscillatoire de base. Il décrit des mouvements oscillatoires (de type sinusoïdaux) au voisinage d'une position d'équilibre stable, par exemple les vibrations induites par une machine.

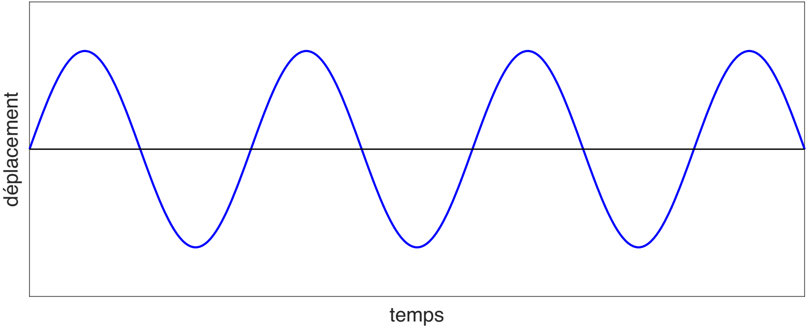


Figure 1.2: Régime harmonique

Régime périodique

Le régime périodique est un mouvement oscillatoire qui se répète à intervalles réguliers. Il décrit des mouvements répétitifs, par exemple les vibrations induites par un piéton sautant sur une passerelle.

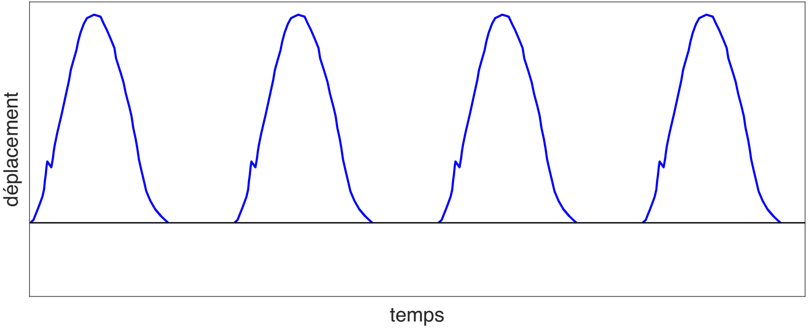


Figure 1.3: Régime périodique

Régime transitoire

Le régime transitoire est un mouvement oscillatoire quelconque. Il décrit des mouvements à caractère aléatoire, par exemple les vibrations induites par le trafic, le vent ou un séisme.

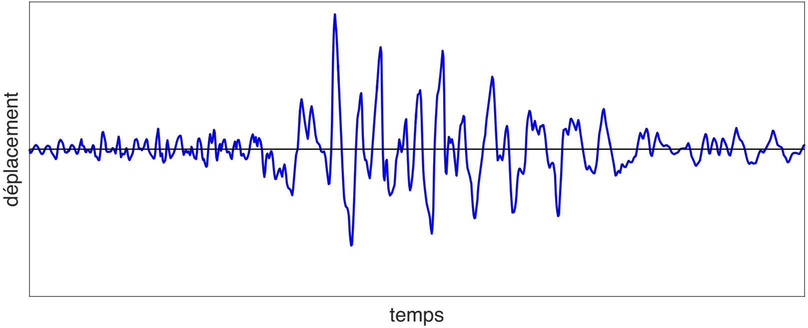


Figure 1.4: Régime transitoire

1.2 Paramètres et hypothèses

1.2.1 Masse

Dynamiquement, les masses engendrent des forces d'inertie qui font osciller la structure. Elles peuvent habituellement être considérées comme concentrées en un certain nombre de points de la structure.

1.2.2 Rigidité

La rigidité est associée aux forces de rappel exercées sur les masses par les éléments stabilisateurs d'une structure en fonction des déplacements de celle-ci. Dans le cas linéaire, ces forces sont directement proportionnelles aux déplacements. La constante de proportionnalité est la rigidité (k).

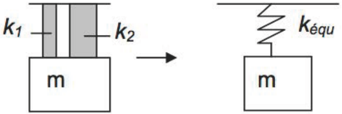
1.2.3 Amortissement

L'amortissement regroupe les phénomènes qui atténuent l'amplitude des oscillations au cours du mouvement. L'amortissement est habituellement grossièrement représenté par un amortissement de type visqueux. L'intensité de la force correspondante est alors proportionnelle à la vitesse.

a) <u>*Système (de ressorts) en série :*</u>

$$\frac{1}{k_{équ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

b) <u>*Système (de ressorts) en parallèle :*</u>



$$k_{équ} = k_1 + k_2$$

Figure 1.5: Systèmes de ressorts en série (a) et en parallèle (b).

1.2.4 Unités

En dynamique, il faut faire très attention aux unités utilisées. En effet, la fréquence dépend de la racine carrée du rapport de la rigidité par la masse. Pour obtenir la bonne unité de la fréquence [s^{-1}], il est recommandé d'exprimer systématiquement la rigidité en [N/m] et la masse en [kg].

1.3 Equation du mouvement

L'équation du mouvement est directement déduite de la deuxième loi de *Newton*.

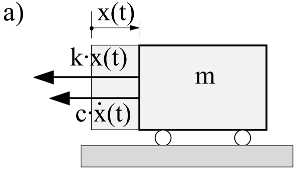


Figure 1.6: L'équation du mouvement selon *Newton* ne fait intervenir que les forces externes agissant sur la masse (a). Le *principe de d'Alembert* consiste à ajouter la force d'inertie pour exprimer un équilibre dynamique (b).

1.3.1 Loi de Newton

La deuxième loi de *Newton* relie les forces extérieures à la variation de la quantité de mouvement:

$$\sum F_{ext} = m \cdot \ddot{x} \qquad\qquad \sum F_{ext} = \frac{d(m \cdot \dot{x})}{dt} \tag{1.1}$$

F_{ext}: forces extérieures
m: masse
$\dot{x}$, $\ddot{x}$: vitesse, accélération

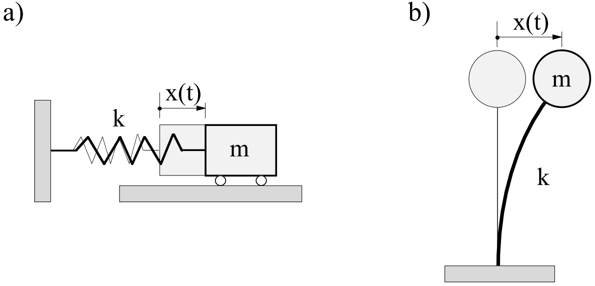
1.3.2 Hypothèses de base

Les cinq hypothèses de base sont les suivantes:

1) les ressorts sont parfaitement linéaires;
2) les ressorts sont sans masse;
3) les masses sont ponctuelles;
4) il n'y a pas de friction;
5) le mouvement s'effectue dans le vide.

2.2 Oscillations libres non amorties

Les oscillations libres non amorties concernent les systèmes dans lesquelles les vibrations ne s'atténuent pas au cours du temps:



c)

$x(t)$:	déplacement
k:	rigidité
m:	masse
$\omega_n=\sqrt{(k/m)}$:	fréquence circulaire
$f_n=\omega_n/2\pi$:	fréquence propre

Figure 2.1: Oscillateur simple sans amortissement. Représentation traditionnelle orientée mécanique (a), représentation orientée structure (b) et définitions (c).

2.2.1 Equation différentielle

L'équation différentielle s'établit à partir des forces agissant sur la masse.

Figure 2.2: Forces agissant sur la masse pour un oscillateur simple sans amortissement. Seule la force de rappel provenant de l'effet du ressort intervient dans les oscillations considérées (horizontales).

Conformément à la deuxième loi de *Newton*, l'équation du mouvement s'exprime:

$$\sum F = -k \cdot x = m \cdot \ddot{x} \qquad \text{ou bien:} \qquad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{2.1}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0 \qquad \text{en posant } \omega_n = \sqrt{k/m} \tag{2.2}$$

2.2.2 Paramètres

Le paramètre (ω_n) est nommé pulsation propre ou fréquence circulaire. Il décrit la rapidité à laquelle les oscillations vont s'effectuer et dépend du rapport de la rigidité du ressort par la valeur de la masse. Son unité est le [rad/s], mais pour l'obtenir, il faut exprimer k en [N/m] et m en [kg].

La fréquence propre ou fréquence fondamentale (f_n) est définie à partir de ω_n par la relation: $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$. Son unité est le Hertz [Hz] ou [s^{-1}].

La période propre ou période fondamentale (T_n) est définie par la relation: $T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n}$. Son unité est la seconde [s].

2.2.3 Solutions en fonction des conditions initiales

La solution générale est constituée par la somme de sinus et de cosinus suivante:

$$x(t) = A \cdot \sin\omega_n t + B \cdot \cos\omega_n t \tag{2.3}$$

Une formulation alternative n'utilisant que le cosinus est la suivante:

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_n t - \phi) \tag{2.4}$$

Les constantes A et B (ou C et ϕ) sont déterminées par les conditions initiales.

Déplacement initial X_0 (en t=0)

En t=0, le terme du sinus disparaît et le terme du cosinus prend une valeur unitaire. La valeur de la constante B est donc égale au déplacement initial (X_0): $B = X_0$

Vitesse initiale V_0 (en t=0)

L'expression de la vitesse s'obtient par la dérivée de la solution générale par rapport au temps (d/dt):

$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega_n \cdot \cos\omega_n t - B \cdot \omega_n \cdot \sin\omega_n t \tag{2.5}$$

En t=0, le terme du sinus disparaît et le terme du cosinus prend une valeur unitaire. La valeur de la constante A est donc égale au rapport de la vitesse initiale par la pulsation propre (V_0/ω_n):

$$A = \frac{V_0}{\omega_n}$$

En prenant en compte les conditions initiales, la solution générale s'exprime:

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_n} \cdot \sin\omega_n t + X_0 \cdot \cos\omega_n t \tag{2.6}$$

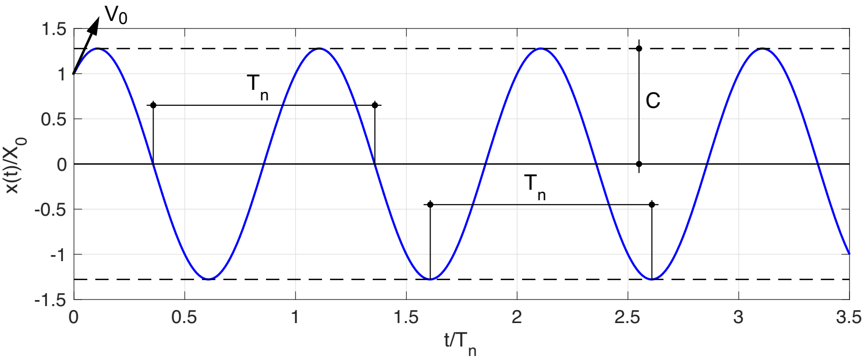


Figure 2.3: Les oscillations libres non amorties sont caractérisées par un déplacement harmonique se répétant indéfiniment avec une période $T_n = 2\pi/\omega_n$.

La solution générale peut également être exprimée en utilisant la formulation alternative. Les constantes C et ϕ se déterminent de la manière suivante:

Déplacement initial X_0 (en t=0)

En t=0, la constante ϕ (avec un signe négatif) constitue l'argument du cosinus. Le cosinus n'étant pas affecté par le signe négatif, il reste:

$$X_0 = C \cdot \cos(-\phi) = C \cdot \cos\phi$$

Vitesse initiale V_0 (en t=0)

L'expression de la vitesse s'obtient par la dérivée de solution générale par rapport au temps (d/dt):

$$\dot{x}(t) = -C \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n t - \phi) \tag{2.7}$$

En t=0, la constante ϕ (avec un signe négatif) constitue l'argument du sinus. Le sinus étant affecté par le signe négatif, il reste:

$$V_0 = -C \cdot \omega_n \cdot \sin(-\phi) = C \cdot \omega_n \cdot \sin\phi$$

En élevant au carré les deux expressions avec les conditions initiales et en les combinant, on obtient:

$$C^2 \cdot (\cos\phi)^2 + C^2 \cdot (\sin\phi)^2 = X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2 = C^2 \cdot ((\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2) = C^2 \Rightarrow C = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{V_0}{\omega_n \cdot X_0}\right)$$

Prenant en compte les conditions initiales, la solution générale s'exprime alors:

$$x(t) = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2} \cdot \cos\left(\omega_n t - \operatorname{atan}\left(\frac{V_0}{\omega_n \cdot X_0}\right)\right) \qquad (2.8)$$

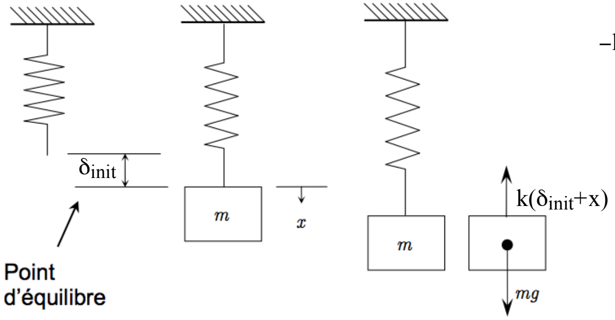
Cette formulation de la solution générale présente l'avantage de donner directement les valeurs maximales du déplacement et de ses différentes dérivées par rapport au temps:

$$\max|x(t)| = C = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\max|\dot{x}(t)| = C \cdot \omega_n = \omega_n \cdot \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \max|\ddot{x}(t)| = C \cdot \omega_n^2 = \omega_n^2 \cdot \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}$$

2.2.4 Influence d'une force constante

Une force constante, comme le poids, n'a pas d'influence sur la pulsation propre du système (ω_n).



$$-k(\delta_{init}+x)+mg=m\ddot{x}$$
$$k\delta_{init}=mg$$
$$m\ddot{x}+kx=0$$
$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta_{init}}}$$

Figure 2.4: Une force constante comme le poids n'a pas d'influence sur la pulsation propre.

2.2.5 Exemple

Cadre bi-encastré avec une traverse infiniment rigide.

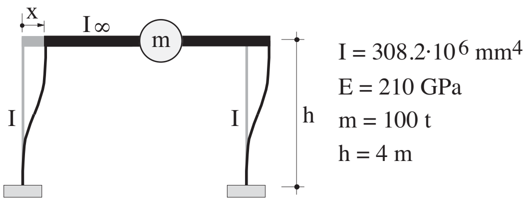


Figure 2.5: Oscillations horizontales non amorties d'un cadre bi-encastré avec traverse infiniment rigide.

rigidité latérale: $$k = 2 \cdot \frac{12EI}{h^3} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 308.2 \cdot 10^{-6}}{4^3} = 24.3 \cdot 10^6 \ \ [\mathrm{N/m}]$$

pulsation propre: $$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{24.3 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^3}} = 15.59 \ \ [\mathrm{rad/s}]$$

fréquence propre: $$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{15.59}{2\pi} = 2.48 \ [Hz]$$

période propre: $$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{15.59} = 0.40 \ [s]$$