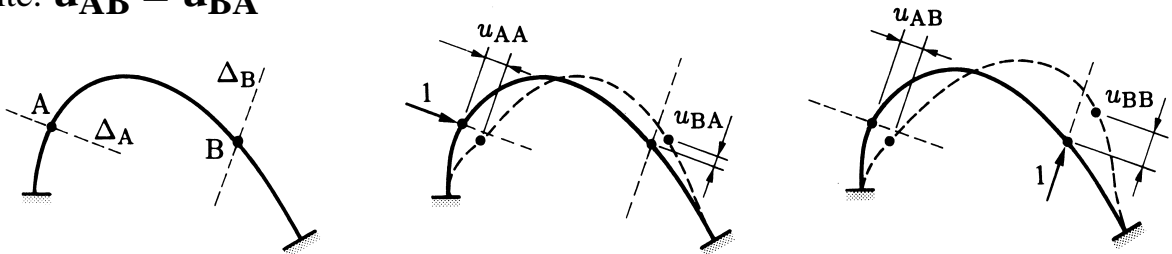


## Poutre sur quatre appuis: Résolution du système

Conditions de compatibilité cinématique:  $[\mathbf{P}] + [\mathbf{F}] [\mathbf{X}] = 0$

$$\begin{aligned}
 -\frac{pL^3}{12EI} + \frac{2L}{3EI} X_1 + \frac{L}{6EI} X_2 &= 0 & X_1 &= \frac{7pL^2}{60} \\
 -\frac{pL^3}{24EI} + \frac{L}{6EI} X_1 + \frac{2L}{3EI} X_2 &= 0 & X_2 &= \frac{2pL^2}{60}
 \end{aligned}
 \longrightarrow$$

Le théorème de réciprocité de Betti-Rayleigh impose la **symétrie** de la matrice de flexibilité:  $\mathbf{u}_{AB} = \mathbf{u}_{BA}$



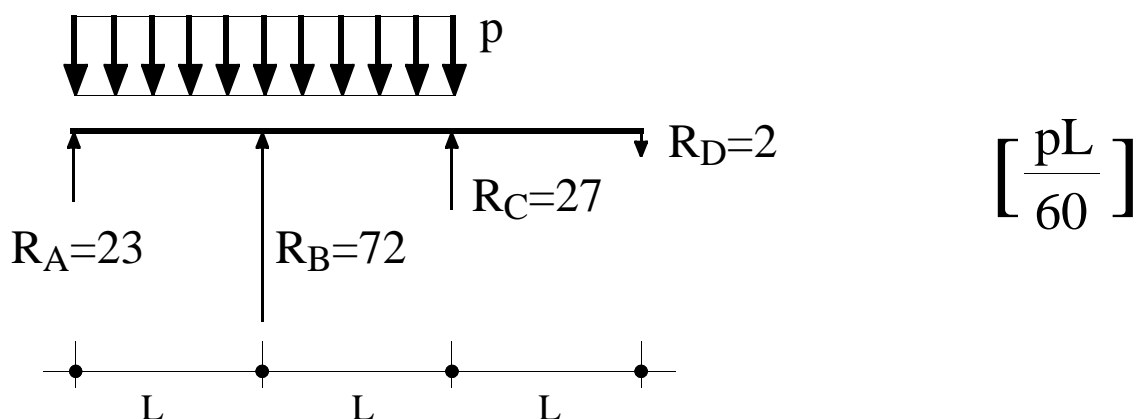
Détermination des réactions d'appui (réduction et équilibre):

$$X_2 = -R_D L \longrightarrow R_D = -\frac{X_2}{L} = -\frac{2pL}{60}$$

$$X_1 = \frac{pL^2}{2} - R_A L \longrightarrow R_A = -\frac{X_1}{L} + \frac{pL}{2} = \frac{23pL}{60}$$

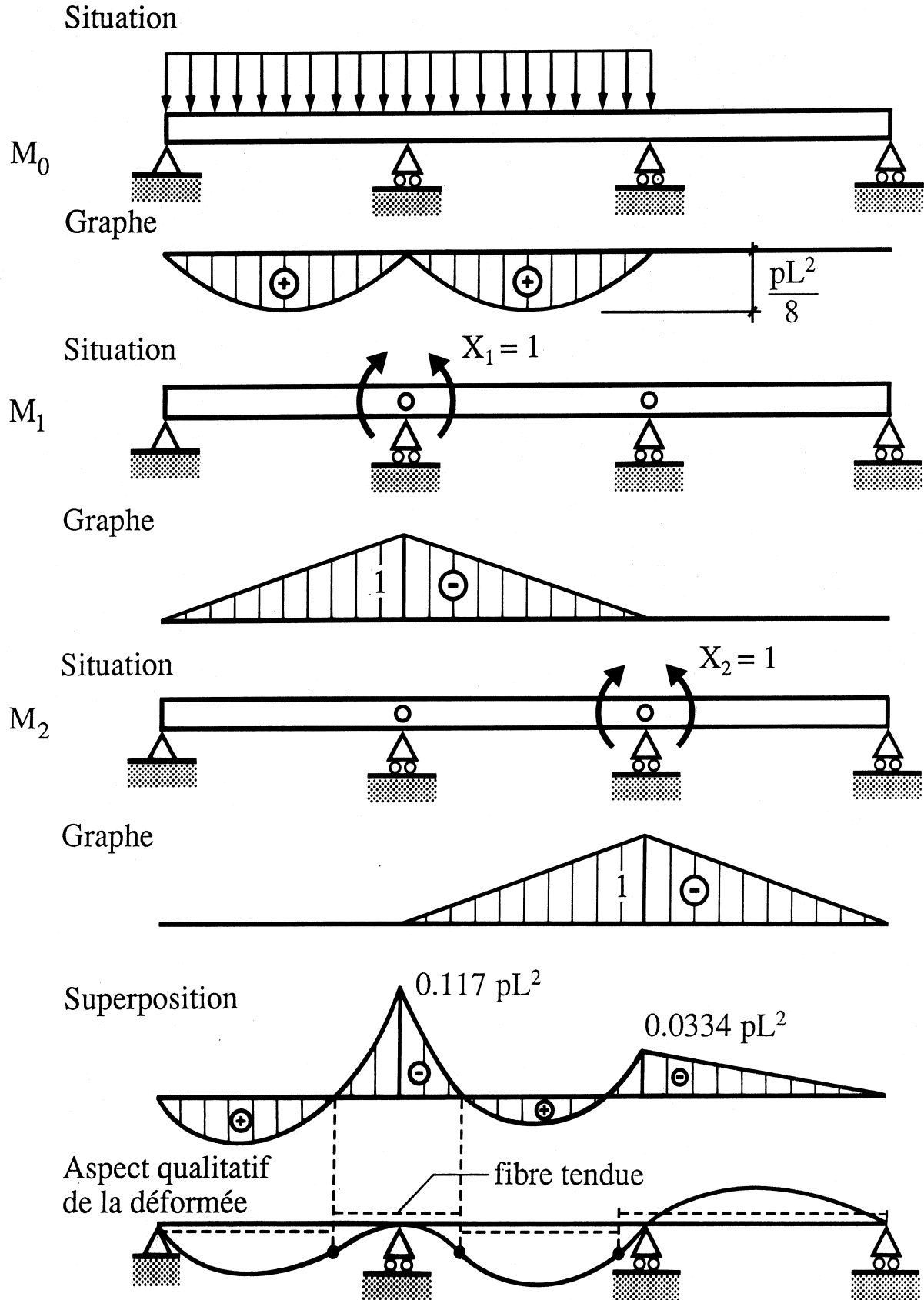
$$X_1 = \frac{pL^2}{2} - R_C L - R_D 2L \longrightarrow R_C = -\frac{X_1}{L} + \frac{pL}{2} - 2R_D = \frac{27pL}{60}$$

$$0 = p 2L - R_A - R_B - R_C - R_D \longrightarrow R_B = \frac{72pL}{60}$$



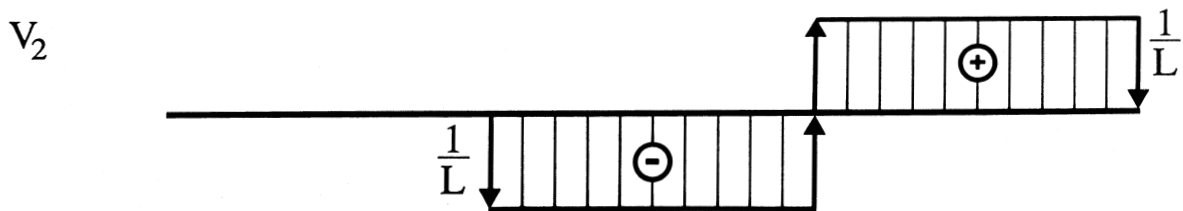
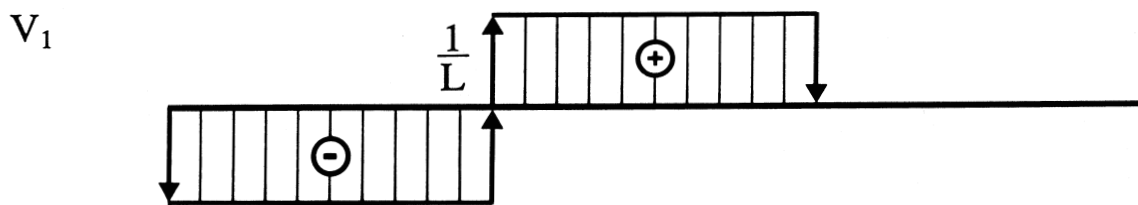
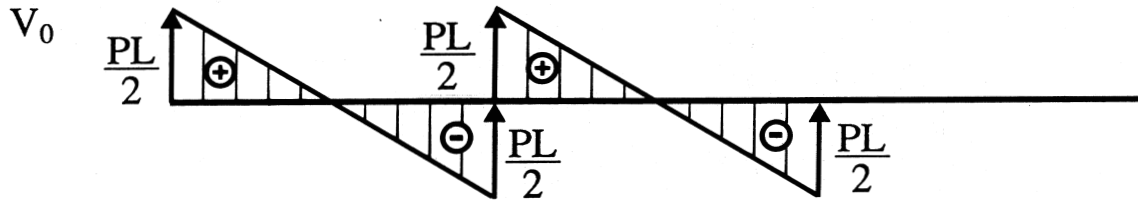
## Poutre sur quatre appuis: Détermination des efforts internes

$$\text{Moment: } M_{\text{tot}} = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

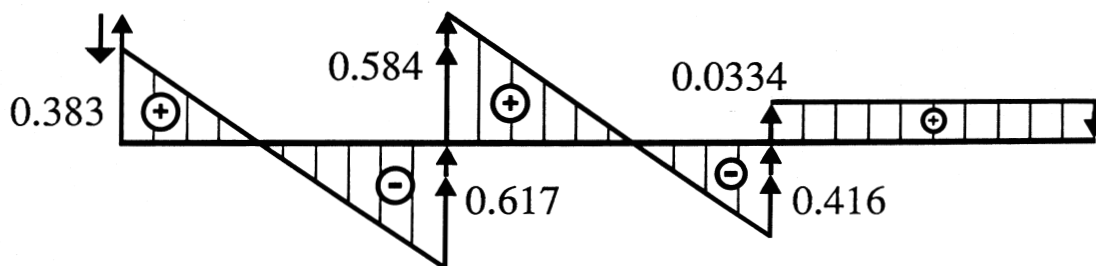


## Poutre sur quatre appuis: Détermination des efforts internes

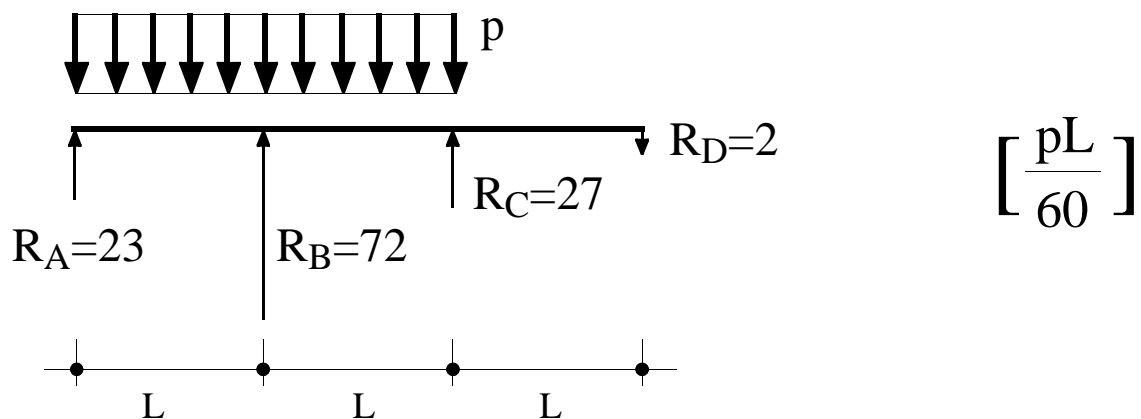
Effort tranchant:  $V_{\text{tot}} = V_0 + V_1 X_1 + V_2 X_2$



Superposition

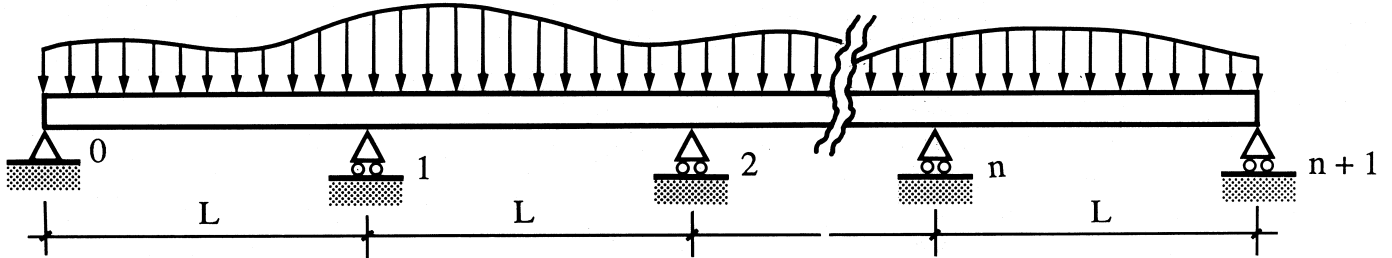


Vérification avec les valeurs déterminées précédemment (p. 28):



## Méthode des forces: Systèmes à plusieurs inconnues

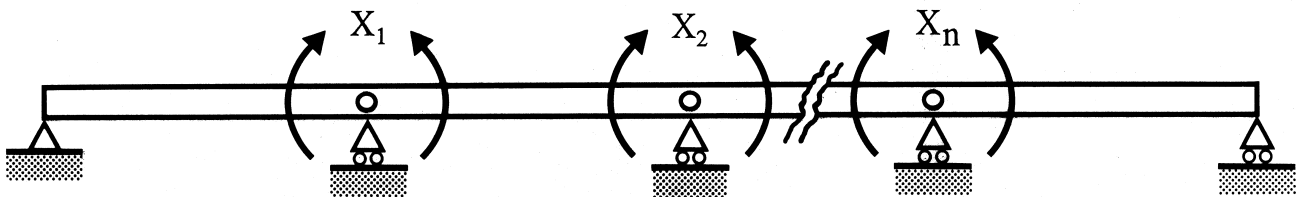
Généralisation: poutre continue



Conditions de compatibilité cinématique (tg continues sur les appuis):

$$\mathbf{a_{i0}} + \sum \mathbf{a_{ij}} \mathbf{X_j} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad [\mathbf{P}] + [\mathbf{F}] [\mathbf{X}] = \mathbf{0}$$

Système fondamental:



Equation des trois moments (avec portées et inerties constantes):

$$\begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} + \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

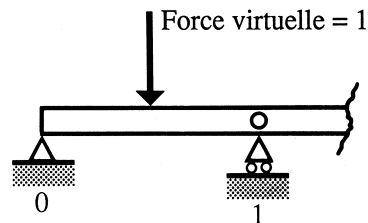
Le choix d'un système fondamental dont le **comportement mécanique** est **proche** de celui du système **réel** permet de simplifier notablement les équations

## Systemes à plusieurs inconnues: Détermination des déformations

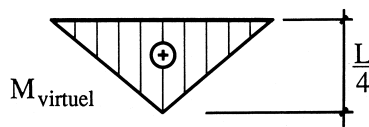
**déformation totale:**  $f_{\text{tot}} = f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_n X_n$

Exemple, poutre continue: détermination de  $f_0$

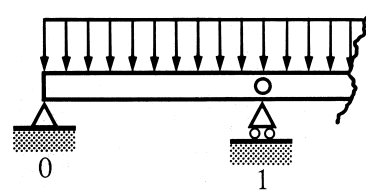
Statique virtuelle



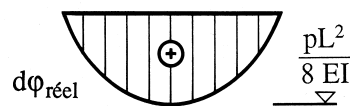
Effort virtuel interne



Cinématique réelle

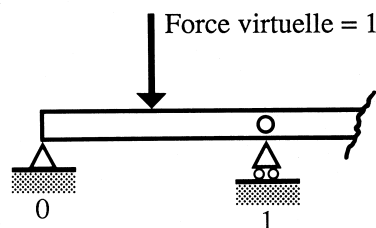


Déformation réelle interne

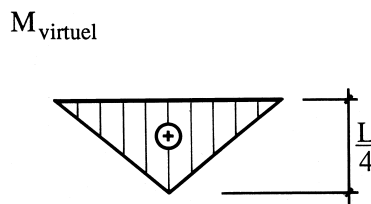


Détermination de  $f_1 X_1$ :

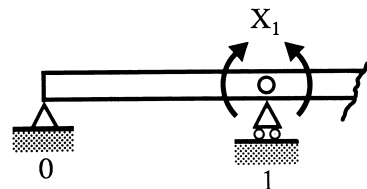
Statique virtuelle



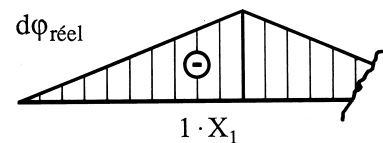
Effort virtuel interne



Cinématique réelle



Déformation réelle interne

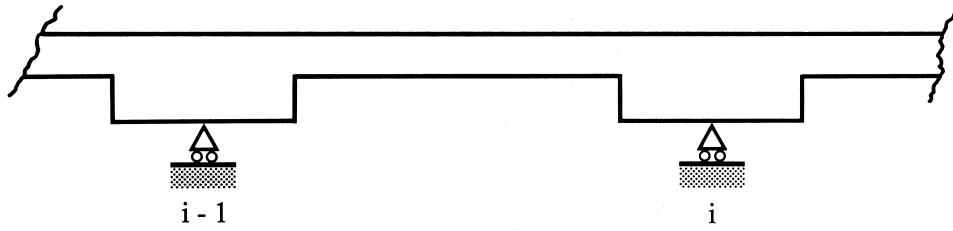


Dans le calcul, la statique virtuelle, déterminée dans le **système fondamental**, peut être mise en évidence. Elle multiplie alors la somme des cinématiques réelles qui correspondent au moment total (dans le **système réel**) engendré par la charge extérieure.

Pour déterminer les déformations d'une structure hyperstatique, la **statique virtuelle** peut être déterminée dans le **système fondamental** (isostatique)

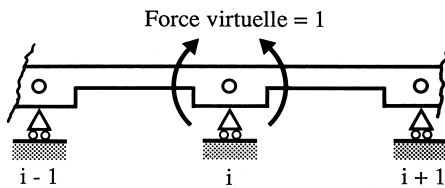
Cette constatation est aussi valable pour la cinématique réelle pour autant que la statique virtuelle soit alors déterminée dans le **système réel**.

## Poutres continues: Augmentation de l'inertie sur appui



Détermination de  $a_{i0}$  à l'aide des travaux virtuels:

Statique virtuelle

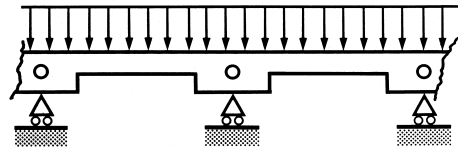


Effort virtuel interne

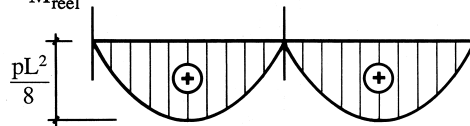
$M_{\text{virtuel}}$



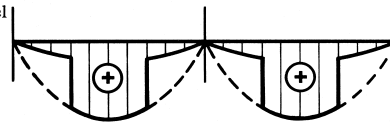
Cinématique réelle



$M_{\text{réel}}$



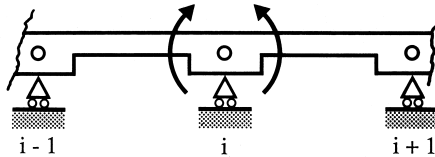
$d\varphi_{\text{réel}}$



Détermination de  $a_{ij}$  à l'aide des travaux virtuels:

Statique virtuelle

Force virtuelle = 1



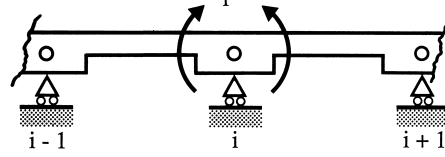
Effort virtuel interne

$M_{\text{virtuel}}$

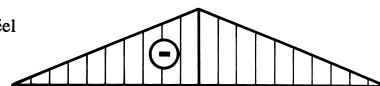


Cinématique réelle

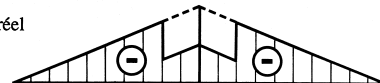
$X_i = 1$



$M_{\text{réel}}$



$d\varphi_{\text{réel}}$

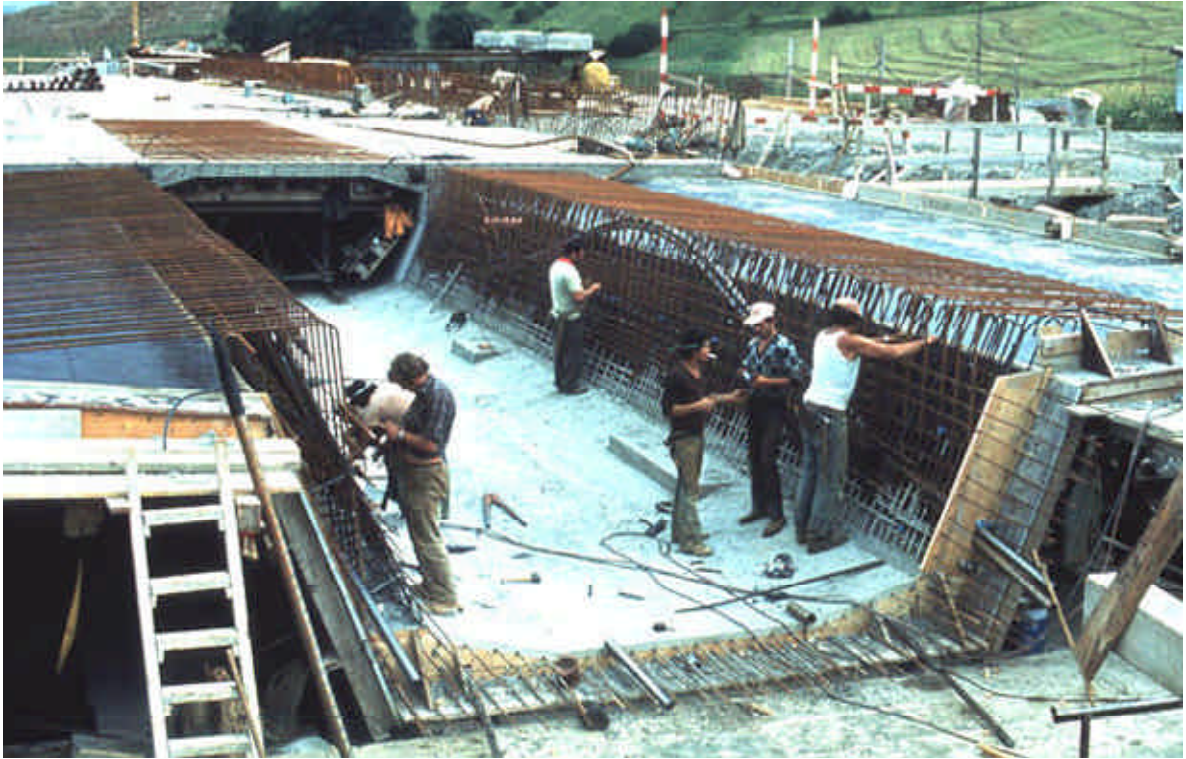


L'augmentation de l'inertie agit plus sur les  $a_{ij}$  que sur les autres coefficients car la diminution de la cinématique réelle correspond aux **maxima** de la statique virtuelle. Les  $X_i$  devront donc **augmenter** pour rétablir la compatibilité cinématique.

Le renforcement d'une portion de la structure **augmente** les efforts internes dans cette zone

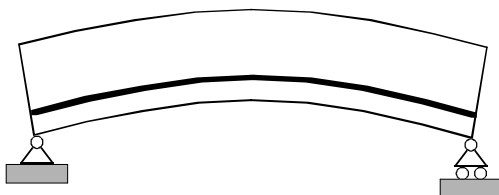
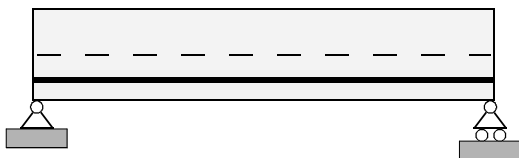
## Précontrainte: Moments d'ordre hyperstatiques (secondaires)

Fréquemment utilisée dans la construction de ponts:



Effets différents dans les systèmes isostatiques et hyperstatiques:

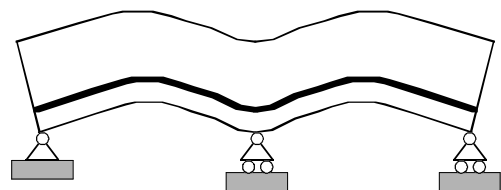
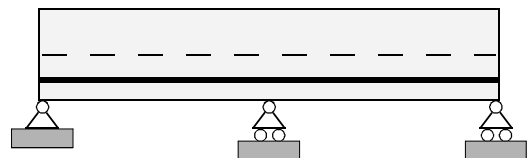
**systèmes isostatiques**



état d'autocontrainte

$$M_{\text{tot}} = M_0$$

**systèmes hyperstatiques**



état d'autocontrainte +  
efforts hyperstatiques

$$M_{\text{tot}} = M_0 + M_h$$