

Mécanique des Structures et Solides IV

- Contenu:**
- Structures hyperstatiques, méthode des forces
 - Structures hyperstatiques, méthode des déplacements

Mécanique des Structures et Solides V

- Contenu:**
- Méthode des déplacements avec effets du second ordre
 - Théorie élastique des plaques
 - Torsion non uniforme

Objectifs:

- Compréhension analytique et intuitive du comportement mécanique des structures
- Ne pas concurrencer l'ordinateur
- Choisir la bonne modélisation et apprécier les résultats d'une manière critique

Illustration:

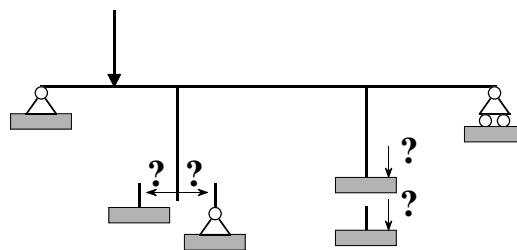
structure réelle:

- pont routier

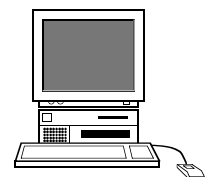
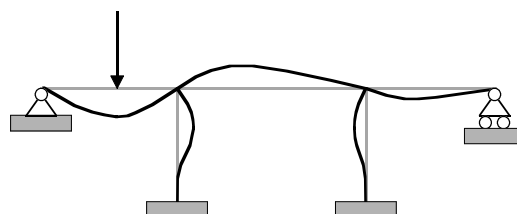


modélisation:

- type d'appui
- niveau d'appui
- pente longitudinale
- courbure en plan
- etc...



calcul statique:



analyse des résultats:

- analyse critique en relation avec la structure réelle



Mécanique des Structures et Solides IV

La modélisation est primordiale dans l'analyse des structures:

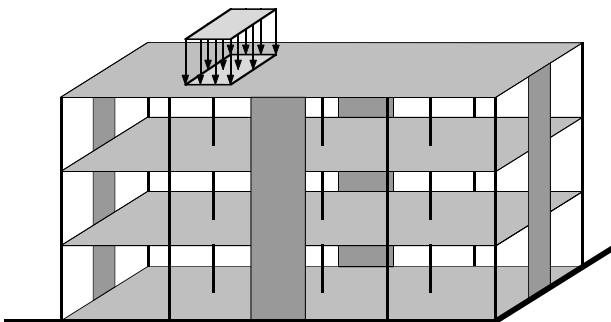
Plusieurs modélisations sont possible pour une même structure.

L'analyse à effectuer oriente la modélisation de la structure mais les résultats obtenus sont conditionnés par le modèle adopté.

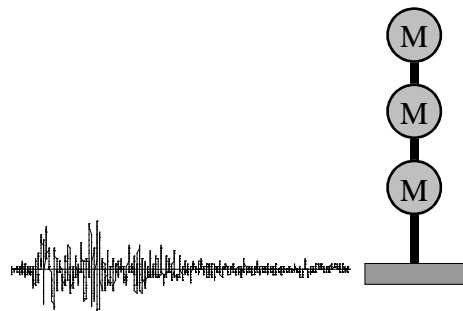
Illustration:



analyse traditionnelle:



analyse sismique:



éléments non porteurs:

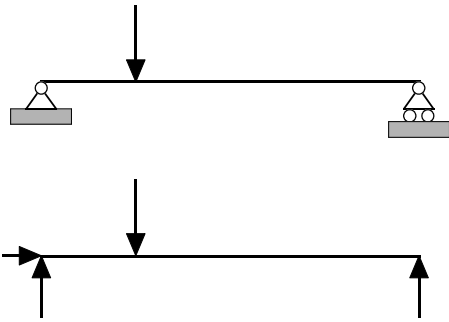
– négligés = sécurité

– négligés \neq sécurité

Mécanique des Structures et Solides IV

Différences entre structures isostatiques et hyperstatiques:

isostatiques

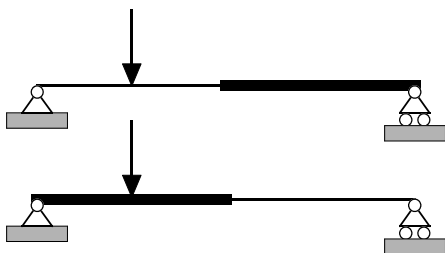


nb inconnues = conditions d'équilibre

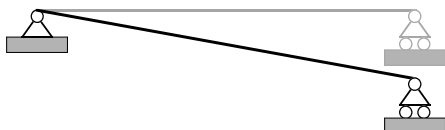
Les conditions d'équilibre suffisent
à déterminer le système

structures souples

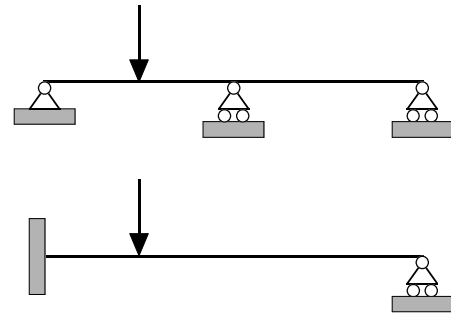
efforts indépendants des rigidités



insensibles aux tassements d'appui



hyperstatiques

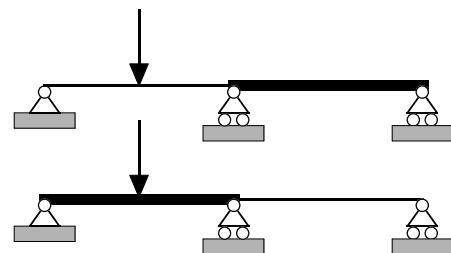


nb inconnues > conditions d'équilibre

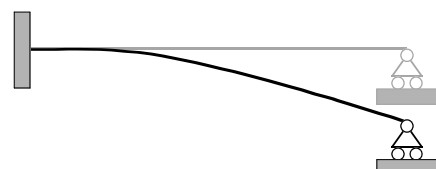
ajouter des conditions

structures rigidifiées

efforts dépendants des rigidités



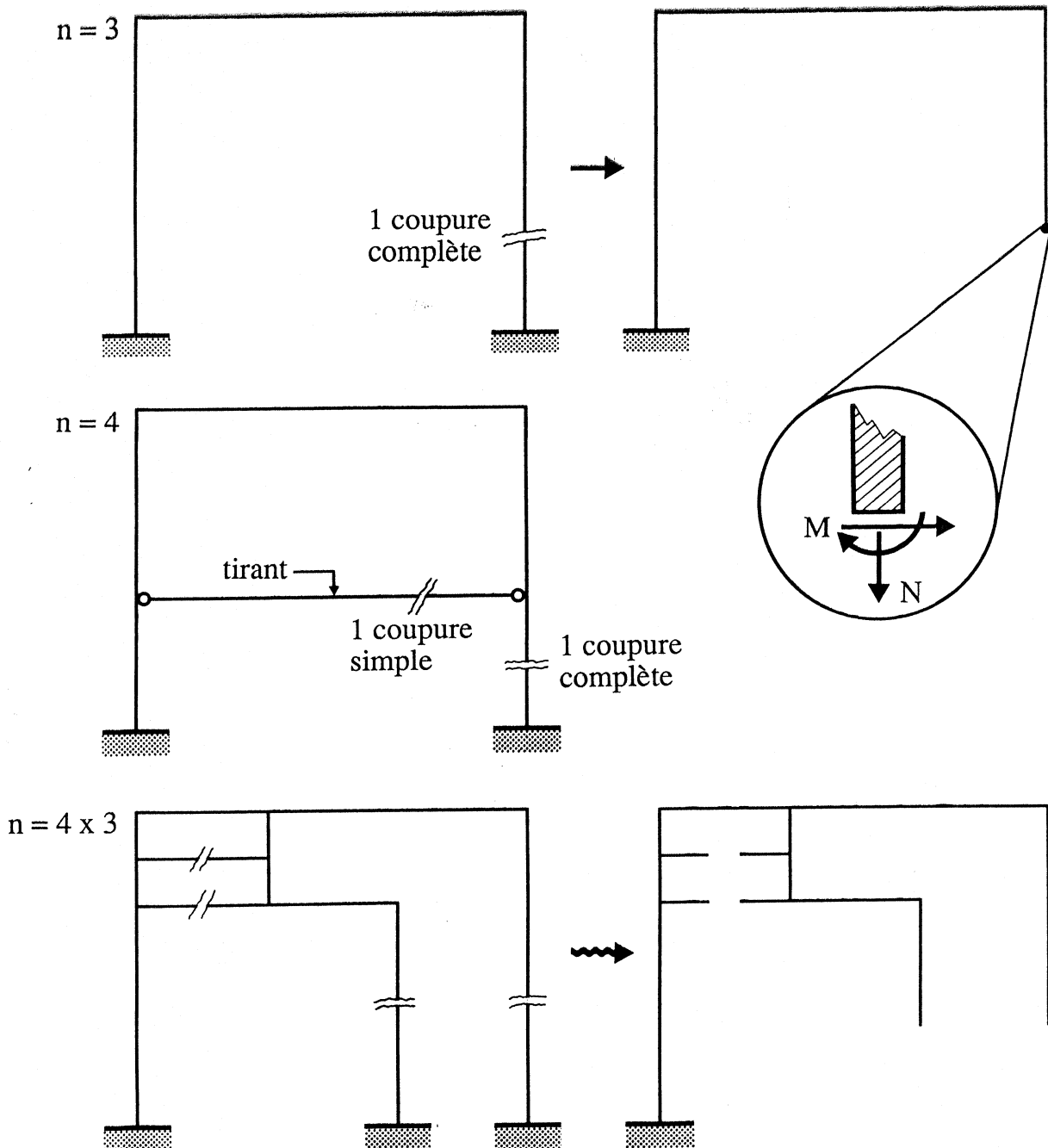
sensibles aux tassements d'appui



Mécanique des Structures et Solides IV

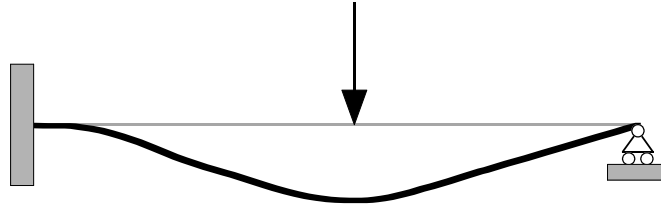
Détermination du degré d'hyperstaticité:

Moyen: rendre la structure isostatique par des coupures.

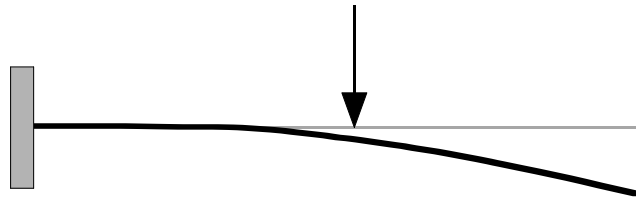


Méthode des forces : Exemple introductif

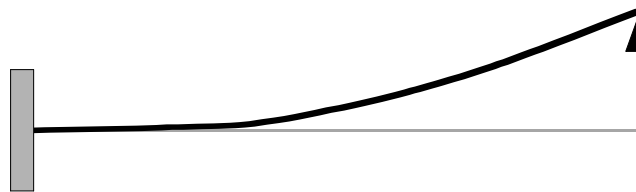
Poutre encastrée appuyée:



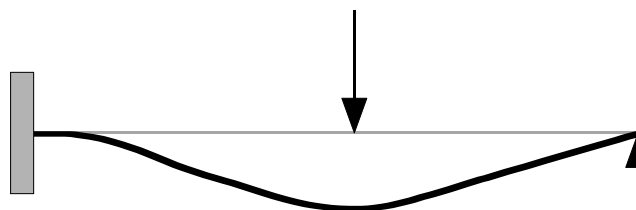
Décomposition:



+



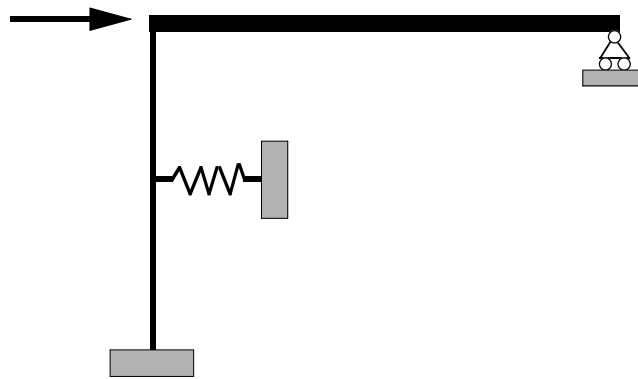
||



une **condition de compatibilité cinématique** a été exprimée sur l'appui

Mécanique des Structures et Solides IV:

Structures hyperstatiques en barres et poutres:



Hypothèses:

- linéarité géométrique (petites déformations)
- linéarité matérielle (béton, béton fissuré ?)
- validité du principe de superposition
- théorie du 1^{er} ordre (considérations sur la structure non déformée)
- déformations dues à V et N négligeables

Bibliographie:

- **Frey F.:** *Analyse des structures et milieux continus*. Traité de Génie Civil de l'EPFL, Volumes 1, 2 et 3
- **Krätzig, W.:** *Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Bauwerke*. Springer-Verlag, 1998
- **Féodossiev V.:** *Résistance des Matériaux*. Editions de Moscou

Structures en barres et poutres: Détermination des déformations


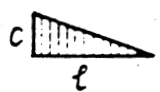
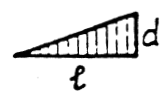

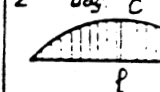
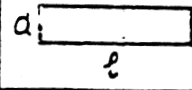
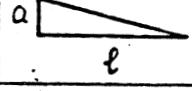
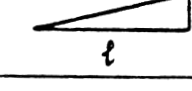
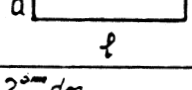
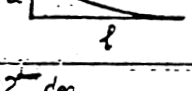
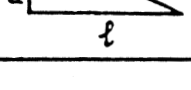
Méthodes de calcul des déformations:

- travaux virtuels
- intégration de l'équation différentielle
- analogie de Mohr, théorème de Castigliano, etc...

Principe des travaux virtuels: $W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}$

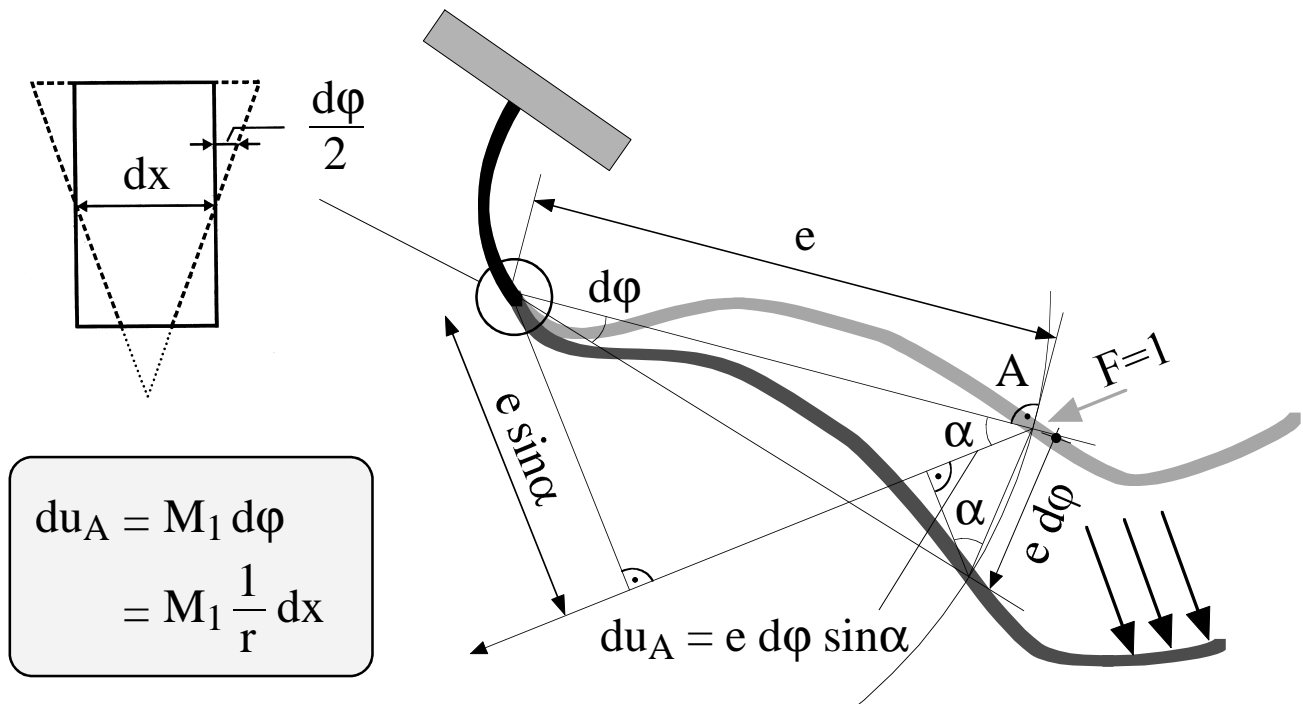
$$1 \Delta = \int_L M_1 \frac{M dx}{EI} + \int_L N_1 \frac{N dx}{EA} + \int_L V_1 \frac{V dx}{GA'}$$

TABEAU DES INTEGRALES $\int_0^l i M^k M dx$

$\begin{matrix} i M \\ k M \end{matrix}$					
	acl	$\frac{1}{2} acl$	$\frac{1}{2} adl$	$\frac{1}{2} al(c+d)$	$\frac{2}{3} acl$
	$\frac{1}{2} acl$	$\frac{1}{3} acl$	$\frac{1}{6} adl$	$\frac{1}{6} al(2c+d)$	$\frac{1}{3} acl$
	$\frac{1}{2} bcl$	$\frac{1}{6} bcl$	$\frac{1}{3} bdl$	$\frac{1}{6} bl(c+2d)$	$\frac{1}{3} bcl$
	$\frac{1}{2}(a+b)cl$	$\frac{1}{6}(2a+b)cl$	$\frac{1}{6}(a+2b)dl$	$\frac{1}{6}[a(2c+d) + b(c+2d)]$	$\frac{1}{3}(a+b)cl$
	$\frac{1}{3} acl$	$\frac{1}{4} acl$	$\frac{1}{12} adl$	$\frac{1}{12} al(3c+d)$	$\frac{1}{5} acl$
	$\frac{2}{3} acl$	$\frac{5}{12} acl$	$\frac{1}{4} adl$	$\frac{1}{12} al(5c+3d)$	$\frac{7}{15} acl$

Travaux virtuels: Exemple illustratif

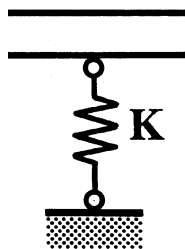
Poutre encastrée: déformation dans une direction quelconque:



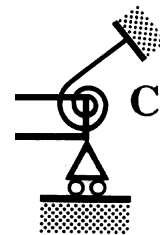
L'incrément de déplacement en A dû à la déformation d'un petit élément équivaut au produit de la rotation subie par l'élément et du moment (par rapport à l'élément) d'une force unitaire en A dans la direction considérée.

$$u_A = \int_L du_A = \int_L M_1 \frac{1}{r} dx = \int_L M_1 \frac{M dx}{EI}$$

Cas des ressorts:

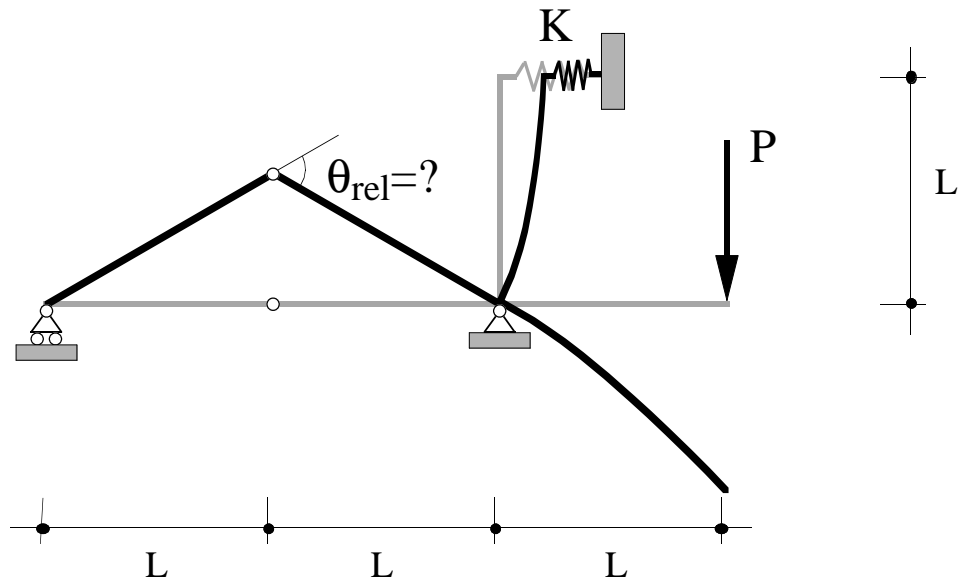


$$W_{\text{int}} = F_1 \frac{F}{K}$$

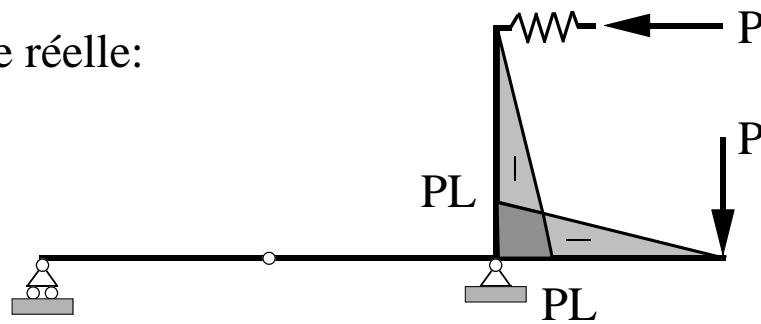


$$W_{\text{int}} = M_1 \frac{M}{C}$$

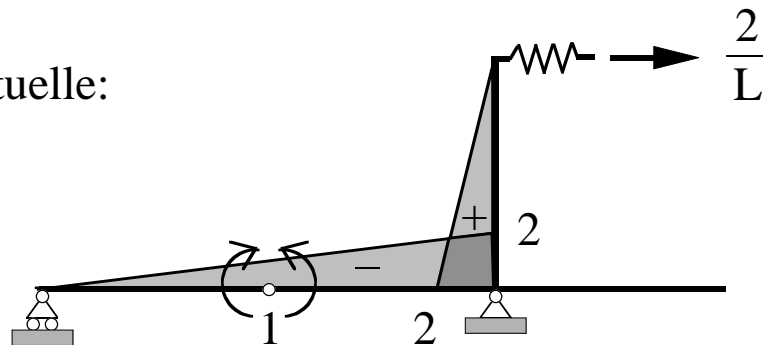
Détermination des déformations par les travaux virtuels: Exemple



Cinématique réelle:



Statique virtuelle:



Rotation relative: $W_{int} = W_{ext}$

$$1 \theta_{rel} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{3} 2 PL L - \frac{2}{L} \frac{P}{K} = -2P \left(\frac{L^2}{3EI} + \frac{1}{KL} \right)$$