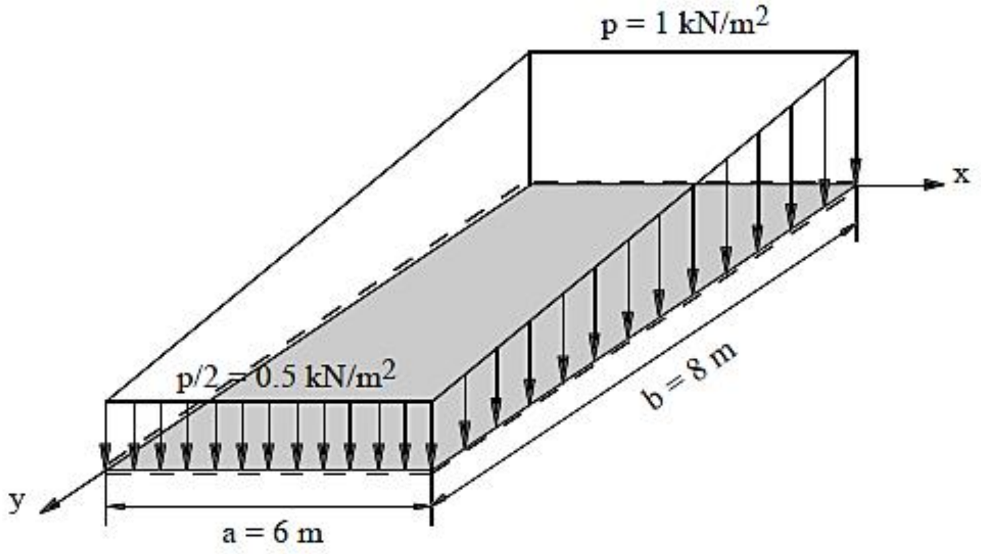


Equation de Lagrange: $$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B}}$$

Charge développée en série double de Fourier: $$p(x,y) = \sum_m^\infty \sum_n^\infty a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Déformée exprimée en série double de Fourier: $$w(x,y) = \sum_m^\infty \sum_n^\infty w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

L'équation de Lagrange devient (c. f. cours p. 24-25):

$$\sum_m^\infty \sum_n^\infty w_{mn}\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_m^\infty \sum_n^\infty \frac{a_{mn}}{B} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

La relation est valable si les coefficients sont égaux terme à terme. La déformée s'exprime donc:

$$w(x,y) = \frac{1}{B\pi^4} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Les coefficients $a_{mn}$ sont déterminés par la relation:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy$$

Pour le cas de charge considéré:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \left(p-\frac{py}{2b}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dx\,dy = \frac{4p}{ab}\int_0^a\int_0^b \left(1-\frac{y}{2b}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dx\,dy$$

$$a_{mn} = \frac{4p}{ab}\left(\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)dx\right)\left(\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy - \frac{1}{2b}\int_0^b y\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\right)$$

$$a_{mn} = \frac{4p}{ab}\left(\frac{a}{m\pi}\left|-\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right|_0^a\right)\left(\frac{b}{n\pi}\left|-\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\right|_0^b + \frac{1}{2b}\frac{b}{n\pi}\left|y\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)+\frac{b}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\right|_0^b\right)$$

$$a_{mn} = \frac{4p}{mn\pi^2}\,(1-\cos(m\pi))\,(1-\cos(n\pi)+0.5\cos(n\pi)) = \frac{4p}{mn\pi^2}\,(1-(-1)^m)\,(1-0.5\,(-1)^n)$$

$$a_{mn} = \begin{cases} \dfrac{12p}{mn\pi^2} & \text{(m, n, impairs)} \\ \dfrac{4p}{mn\pi^2} & \text{(m, impair; n, pair)} \end{cases}$$

La déformée s'exprime donc par: $$w(x,y) = \frac{1}{B\pi^6}pa^4\sum_m^\infty\sum_n^\infty \frac{\alpha}{mn\,(m^2+\rho^2n^2)^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

où: $\rho = \frac{a}{b}$ et $\alpha = 12$ pour n impair et 4 pour n pair, m étant impair

Au centre de la plaque les termes pour n pair s'annulent ($\sin n\pi/2 = \sin k\pi$) et l'expression se simplifie:

$$x = \frac{a}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \qquad\qquad y = \frac{b}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$w(a/2,b/2) = \frac{12}{B\pi^6}pa^4\sum_m^\infty\sum_n^\infty \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn\,(m^2+\rho^2n^2)^2} \qquad \text{(m, n, impairs)}$$

La flèche au centre de la plaque pour le cas de charge considéré est donc exactement égale à celle d'une plaque uniformément chargée par une charge moyenne (12=(16+8)/2). Ceci n'est valable que pour le centre de la plaque, la flèche maximum n'étant pas située au centre. On se convaincra de ce fait en décomposant la charge en une charge moyenne et une charge triangulaire antimétrique: la charge antimétrique ne provoquant pas de déformation au centre de la plaque.

Pour la plaque considérée, $\rho = 3/4$: $$w(a/2,a/2) = \frac{12}{B\pi^6}pa^4\;0.3983 = 0.00497\,\frac{pa^4}{B}$$