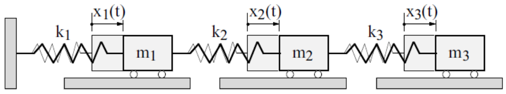
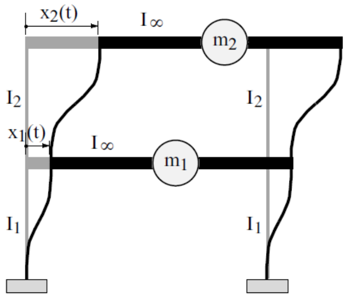
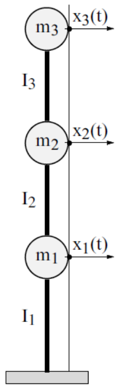
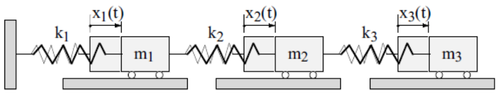
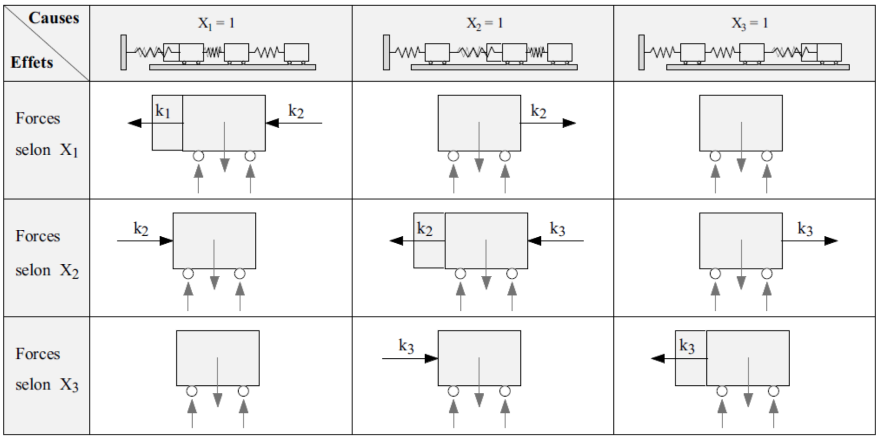
Résumé du 9ème cours : Systèmes à plusieurs degrés de liberté











Le système s'écrit de manière condensée sous forme matricielle :

$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = 0$ avec $\underline{M}$ matrice des masses, $\underline{K}$ matrice de rigidité, $\underline{x}$ vecteur des déplacements.

Modes propres et pulsations propres

Pour des déplacements harmoniques, le système devient :

$$-\omega_n^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{x} + \underline{K} \cdot \underline{x} = 0 \quad \text{ou bien} \quad [\underline{K} - \omega_n^2 \cdot \underline{M}] \cdot [\underline{x}] = 0$$

Si le déterminant de la matrice $[\underline{K} - \omega_n^2 \cdot \underline{M}]$ est nul, le système possède d'autres solutions que la solution triviale ($x_j=0$).

Cadre bi-encastré (avec $k_1=2 \cdot k_2=2k$ et $m_1=2 \cdot m_2=2m$)

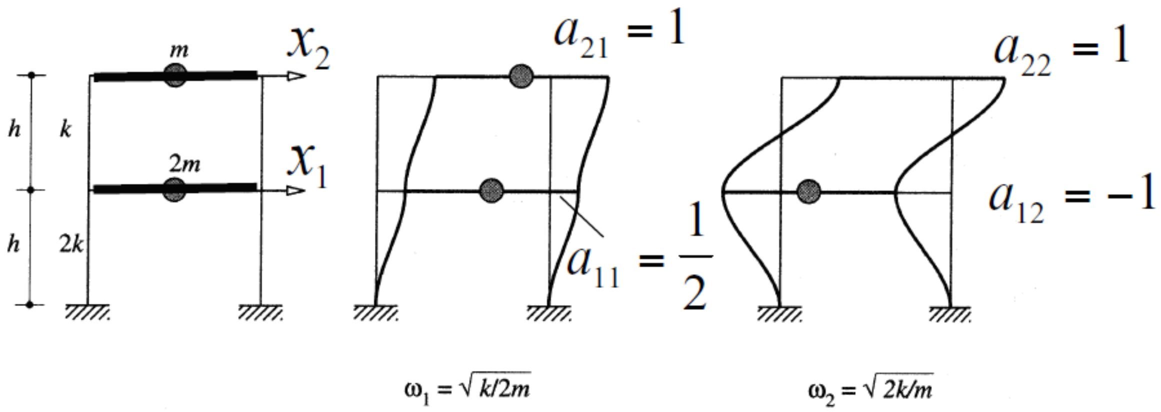
Le système d'équations devient :

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le problème aux valeurs propres $|\underline{K} - \omega_n^2 \cdot \underline{M}| = 0$ a deux solutions pour ω_n^2 : $\omega_1^2 = \frac{k}{2m}$ et $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$

Les pulsations propres du système valent donc: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

Les modes propres correspondent aux deux vecteurs propres $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



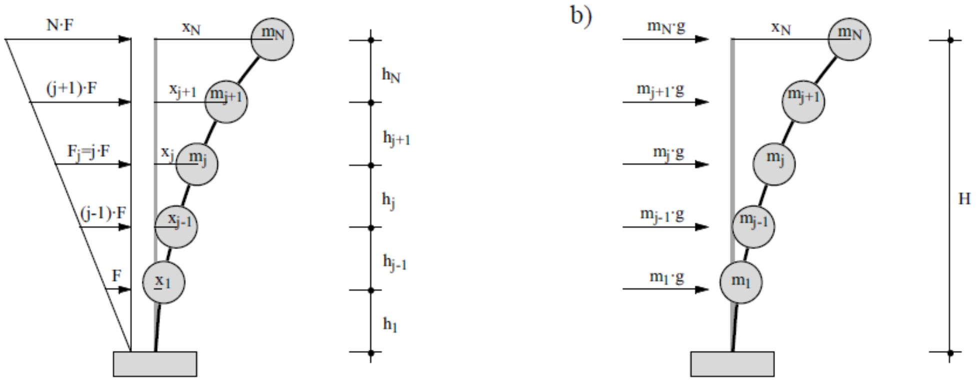
Grâce à la propriété d'orthogonalité, les modes propres permettent d'exprimer les déplacements d'une autre manière :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z_1(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z_2(t) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \cdot z_1(t) + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \cdot z_2(t) = \sum_{n=1}^{2} \underline{A}_n \cdot z_n = \underline{A} \cdot \underline{z}$$

Avec $\underline{A_n}$ vecteurs propres, $\underline{z}$ coordonnées modales, $\underline{A}$ matrice des vecteurs modaux.

Matrice de rigidité
Pour la détermination de la matrice de rigidité, il vaut mieux passer par l'établissement préliminaire de la matrice de flexibilité : $\hat{f}_{ij} = \frac{1}{6 \cdot EI} \cdot h_j^2 \cdot (3 \cdot h_i - h_j)$, qui pour une hauteur des étages constante devient : $\hat{f}_{ij} = \frac{1}{6 \cdot EI} \cdot j^2 \cdot (3 \cdot i - j)$.
La matrice de rigidité $\underline{K}$ est déterminée en inversant la matrice de flexibilité $\hat{f}_{ij}$. $\underline{K} = \underline{\hat{f}^{-1}}$.

Quotient de Rayleigh



Le *quotient de Rayleigh* constitue une alternative à la résolution du problème aux valeurs propres.

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot x_j^2}{\sum_{j=1}^{N} F_j \cdot x_j}}$$

Une version simplifiée du *quotient de Rayleigh* utilise le déplacement au sommet (xN) déterminé avec le poids des étages (mj·g) comme forces fictives :

$$T_1[s] = 2 \cdot \sqrt{x_N[m]}$$