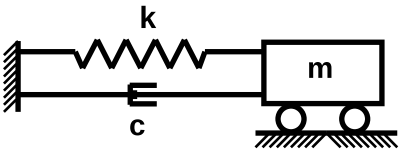
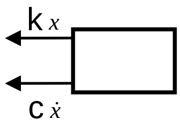
Résumé du 2ème cours :

oscillations amorties





Equation différentielle $\quad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

c : constante d'amortissement [N s / m]

$\zeta = c/2\omega_n m$: coefficient d'amortissement [-] → exprimé en [%]

3 cas possibles

- amortissement fort (sur-amorti – mouvement apériodique) $\zeta > 1$
- amortissement critique $\zeta = 1$
- amortissement faible (sous-amorti – mouvement oscillatoire amortie) $\zeta < 1$

Faible amortissement : solution (en fonction des conditions initiales)

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos \omega_D t + \frac{V_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_D}\sin \omega_D t\right]$$

$\zeta = c / 2m\omega_n$: coefficient d'amortissement [-] ≡ fraction d'amortissement critique

$\omega_D = \sqrt{\omega_n^2 - \zeta\omega_n^{\ 2}} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ pseudo-pulsation [rad/s]

Décrément logarithmique

$\Delta \approx 2\pi\zeta$ – un cycle

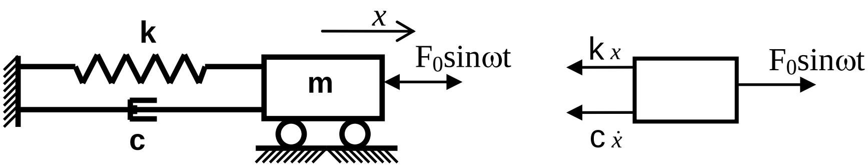
$\Delta_n \approx 2\pi n\zeta$ – n cycles

Nombre de cycles pour réduire l'amplitude de moitié

$n_{50\%} \approx \ln 2 / 2\pi\zeta$

$\approx 0{,}11/\zeta = 11/\zeta$ [%]

oscillations entretenues (ou forcées)



Equation différentielle $\quad F_0 \sin \omega t - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = (F_0 / m)\sin \omega t$$

Solution générale = $x_h(t)$, solution homogène + $x_p(t)$, solution particulière

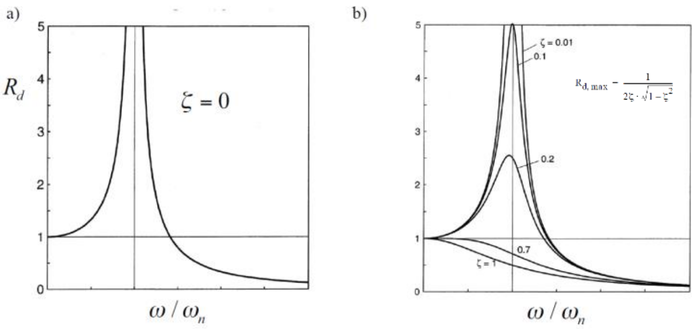
$$x(t) = \underbrace{C \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \cos(\omega_D t - \phi_1)}_{\text{Solution homogène} \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \operatorname{atan}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)\right)}_{\text{Solution particulière}}$$

F_0 : amplitude de la force harmonique

$F_0 / k = \partial_{st}$ Déplacement statique

R_d est le facteur d'amplification dynamique de l'application harmonique de la force F_0 à la pulsation ω

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

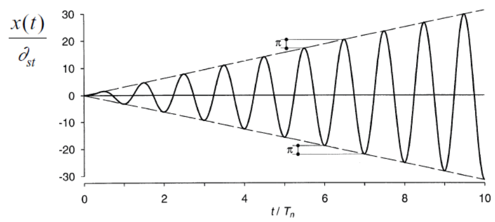


R_d	ω/ω_n	Remarques
$1/(2\zeta\sqrt{(1-\zeta^2)})$	$\sqrt{(1-2\zeta^2)}$	Valeur maximale de R_d
$1/(2\zeta)$	1	Changement rapide de phase

Résonance : Le phénomène de résonance apparaît lorsque les fréquences coïncident ($\omega=\omega_n$).

Sans amortissement:

$$x(t) = \frac{F_0}{2k} \cdot (\sin\omega_n t - \omega_n t \cdot \cos\omega_n t) = \frac{\delta_{stat}}{2} \cdot (\sin\omega_n t - \omega_n t \cdot \cos\omega_n t)$$



Avec amortissement:

$$x(t) = -\frac{\delta_{stat}}{2\zeta} \cdot \left[e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin\omega_D t\right) - \cos\omega_n t\right]$$

$$x(t) \cong \frac{\delta_{stat}}{2\zeta} \cdot \left[\left(e^{-\zeta\omega_n t} - 1\right) \cdot \cos\omega_n t\right]$$