

Résumé du 12ème cours : Mouvement fondation

4.2 Oscillations libres

Conditions initiales en coordonnées modales :

$$\underline{a}_n^T \underline{M} \underline{x} = \underline{a}_n^T \underline{M} \underline{a}_n z_n(0)$$

$$z_n(0) = \frac{\underline{a}_n^T \underline{M} \underline{x}}{\underline{a}_n^T \underline{M} \underline{a}_n} = \frac{\underline{a}_n^T \underline{M} \underline{x}}{m_n^*}$$

Mouvement de la fondation (séisme)

Equation du mouvement : $\underline{M} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = -\underline{M} \cdot \underline{e}_x \cdot \ddot{x}_g(t)$

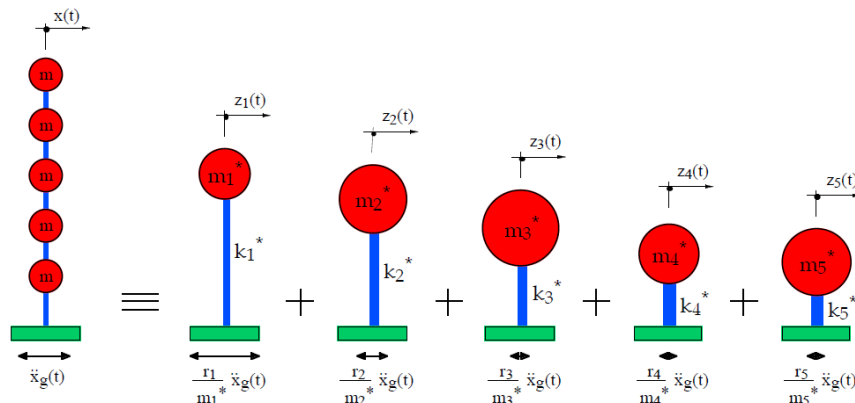
en coordonnées modales : $\underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{A} \cdot \ddot{\underline{z}} + \underline{A}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{A} \cdot \dot{\underline{z}} + \underline{A}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{A} \cdot \underline{z} = -\underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_x \cdot \ddot{x}_g(t) = -\underline{r} \cdot \ddot{x}_g$
 $\underline{M}^* \cdot \ddot{\underline{z}} + \underline{C}^* \cdot \dot{\underline{z}} + \underline{K}^* \cdot \underline{z} = -\underline{A}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_x \cdot \ddot{x}_g(t) = -\underline{r} \cdot \ddot{x}_g$

masses généralisées : $m_n^* = \sum_{j=1}^n A_{jn}^2 \cdot m_j$

facteurs de participation : $r_n = \sum_{j=1}^n A_{jn} \cdot m_j$

n^{ème} ligne : $\ddot{z}_n + 2\zeta_n \omega_n \cdot \dot{z}_n + \omega_n^2 \cdot z_n = -\frac{r_n}{m_n^*} \cdot \ddot{x}_g(t)$

Remarque : les grandeurs généralisées dépendent de la normalisation des modes.



Superposition des réponses modales :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \\ A_{51} \end{bmatrix} \cdot z_1(t) + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \\ A_{52} \end{bmatrix} \cdot z_2(t) + \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \\ A_{43} \\ A_{53} \end{bmatrix} \cdot z_3(t) + \begin{bmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \\ A_{44} \\ A_{54} \end{bmatrix} \cdot z_4(t) + \begin{bmatrix} A_{15} \\ A_{25} \\ A_{35} \\ A_{45} \\ A_{55} \end{bmatrix} \cdot z_5(t)$$

Masse modale :

$$m_{\text{mod}, n} = \left(\frac{r_n}{m_n^*} \right)^2 \cdot m_n^* = \frac{\left(\sum_{j=1}^N A_{jn} \cdot m_j \right)^2}{\sum_{j=1}^N A_{jn}^2 \cdot m_j} \quad \sum_{n=1}^N m_{\text{mod}, n} = \sum_{n=1}^N m_n$$

Hauteur modale :

$$H_n^* = \frac{\underline{A}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{H}}{\underline{A}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{A}_n} = \frac{\sum A_{jn} \cdot H_j \cdot m_j}{\sum A_{jn} \cdot m_j}$$