

# 5 Réponses et spectres

## 5.1 Introduction

Le spectre de réponse représente la réponse dynamique maximale d'oscillateurs simples, généralement élastiques (linéaires), avec une valeur fixée de l'amortissement visqueux. La détermination du spectre de réponse nécessite la résolution de l'équation du mouvement pour un oscillateur simple linéaire (méthode de résolution: interpolation de l'excitation, différence centrée ou *Newmark* par exemple).

## 5.2 Cas sismique

### 5.2.1 Définition et caractéristiques

Le déplacement maximal lié à une excitation sismique donnée ( $\ddot{x}_g$ ) s'exprime (*intégrale de Duhamel*):

$$S_u(\omega_n, \zeta) = \max|x(t)| = \max \left| \frac{1}{\omega_D} \cdot \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau) \cdot d\tau \right| \quad (5.1)$$

Les valeurs  $S_u$ , une pour chaque  $\omega_n$ , sont nommées déplacements relatifs spectraux. De la même manière, on peut obtenir les vitesses relatives ( $S_v$ ) spectrales en dérivant par rapport au temps (d/dt):

$$S_v(\omega_n, \zeta) = \max|\dot{x}(t)| = \max \left| \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cdot \cos\omega_D(t-\tau) \cdot d\tau - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_D} \cdot \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau) \cdot d\tau \right| \quad (5.2)$$

Les accélérations spectrales absolues ( $S_a$ ) peuvent être obtenues à partir de l'équation (2.31), c'est-à-dire  $\ddot{x}_a = \ddot{x} + \ddot{x}_g = -2\zeta\omega_n \cdot \dot{x} - \omega_n^2 \cdot x$ :

$$S_a(\omega_n, \zeta) = \max|\ddot{x}_g(t) + \ddot{x}(t)| = \max \left| \frac{\omega_n(1-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau) \cdot d\tau + 2\zeta\omega_n \cdot \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cdot \cos\omega_D(t-\tau) \cdot d\tau \right| \quad (5.3)$$

Les expressions se simplifient en présence d'amortissement faible (pour  $\zeta < 20\%$ ). Dans ce cas,  $\omega_D \approx \omega_n$  et les termes  $\zeta$  et  $\zeta^2$  sont très petits. Par ailleurs, le remplacement (arbitraire) du cosinus par un sinus dans l'équation (5.2) permet de lier la pseudo-vitesse ( $S_{pv}$ ) au déplacement spectral relatif ( $S_u$ ):

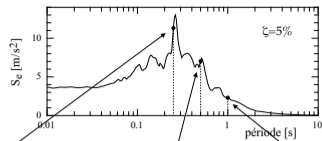
$$S_{pv}(\omega_n, \zeta) = \max \left| \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cdot \sin \omega_n(t-\tau) \cdot d\tau \right| \approx \omega_n \cdot S_u(\omega_n, \zeta) \quad (5.4)$$

De manière similaire, la modification de l'équation (5.3) permet de lier la pseudo-accélération spectrale ( $S_e$ ) au déplacement spectral relatif ( $S_u$ ):

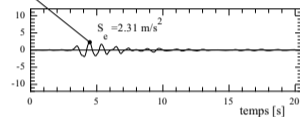
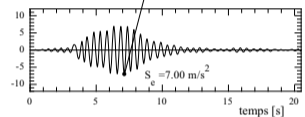
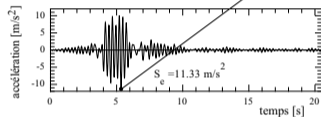
$$S_e(\omega_n, \zeta) = \max \left| \omega_n \cdot \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cdot \sin \omega_n(t-\tau) \cdot d\tau \right| \approx \omega_n^2 \cdot S_u(\omega_n, \zeta) \quad (5.5)$$

Le spectre de réponse est construit en reportant la valeur de la réponse maximale (déplacement relatif ou accélération) subie par chaque oscillateur en fonction de sa période fondamentale. Par exemple, pour l'accélérogramme de la composante N-S du séisme du Frioul de 1976 au nord de l'Italie enregistré près de la ville de Tolmezzo, on obtient:

a)



b)

coefficient d'amortissement:  $\zeta$ 

...

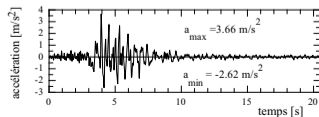


...



comportement élastique

c)



Le terme de “spectre” rappelle qu’une partie de l’information est perdue lors de l’établissement de la courbe. En revanche, le spectre de réponse permet d’identifier quelles structures ont été le plus sollicitées lors du séisme. L’examen de l’accélérogramme ne permet pas de connaître ce genre d’informations. La procédure peut être répétée pour n’importe quel accélérogramme, comme pour les trois exemples suivants (Kobe au Japon en 1995, Frioul en 1976 et Kocaeli en Turquie en 1999):

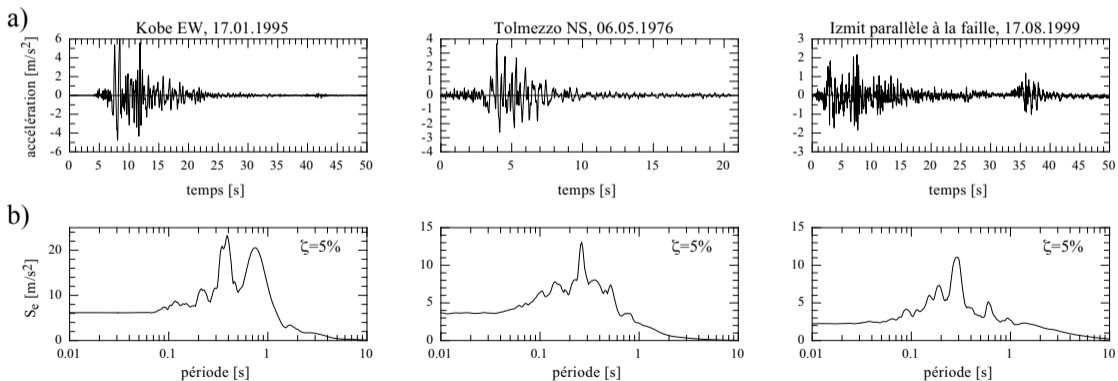


Figure 5.2: Accélérogrammes (a) et spectres de réponse élastiques de l’accélération (b) pour 3 séismes enregistrés.

Les spectres de réponse ont été calculés pour un coefficient d'amortissement visqueux de  $\zeta=5\%$ . Ces spectres de réponse ont des propriétés communes. Mis à part des pics localisés, propres à chaque séisme, on distingue clairement plusieurs régions:

- 1) Pour des périodes très faibles, l'accélération spectrale est égale à l'accélération maximale du sol. Cette propriété s'explique si l'on considère que les oscillateurs simples correspondants sont très rigides. Ils ne se déforment pas pendant le séisme et suivent, en bloc, les mouvements du sol. Leur accélération maximale est donc égale à celle du sol.
- 2) Pour des périodes très grandes, l'accélération spectrale devient très petite. Cette propriété s'explique si l'on considère que les oscillateurs simples correspondants sont très souples. Ils se déforment très facilement pendant le séisme, la masse restant dans sa position de repos.
- 3) Entre les deux extrêmes, il apparaît une gamme de périodes (grosso modo entre 0.2 et 0.8 seconde) pour lesquelles l'accélération spectrale est plus élevée que celle du sol. Si l'on excepte les pics localisés, l'accélération spectrale peut être considérée comme à peu près constante. Pour cette raison, cette région est appelée "plateau".
- 4) Entre les bords du plateau et les extrémités du spectre de réponse, l'accélération spectrale diminue progressivement pour rejoindre les valeurs identifiées aux points 1) et 2).

## 5.2.2 Spectre de réponse de l'accélération et spectre de réponse du déplacement relatif

Si c'est le déplacement relatif au cours du temps des oscillateurs simples qui est considéré, on obtient le spectre de réponse élastique du déplacement relatif par une construction similaire. Les deux spectres de réponse élastiques sont reliés par la fréquence circulaire ( $\omega_n$ ) selon la relation de l'équation (5.5):

$$S_u = S_e / \omega_n^2 = S_e / (2\pi f_n)^2 = S_e T_n^2 / (2\pi)^2$$

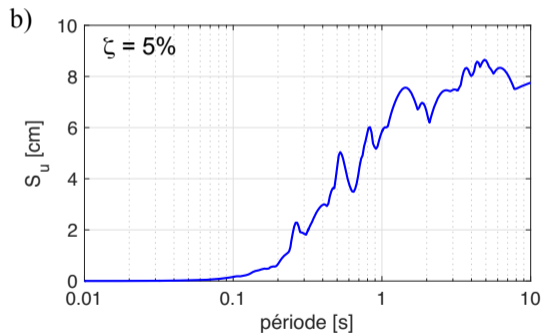
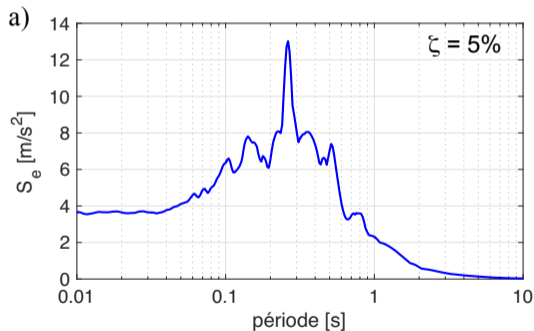


Figure 5.3: Spectre de réponse de l'accélération (a) et spectre de réponse du déplacement relatif (b).

### 5.2.3 Influence de l'amortissement

L'allure et l'amplitude du spectre de réponse varie avec l'amortissement. L'amortissement a tendance à diminuer l'amplitude du spectre de réponse et à gommer les pics. Sans amortissement, plusieurs pics élevés apparaissent. L'augmentation de l'amortissement lisse les courbes et produit un abaissement général des valeurs spectrales. Toutefois l'allure générale du spectre de réponse est conservée.

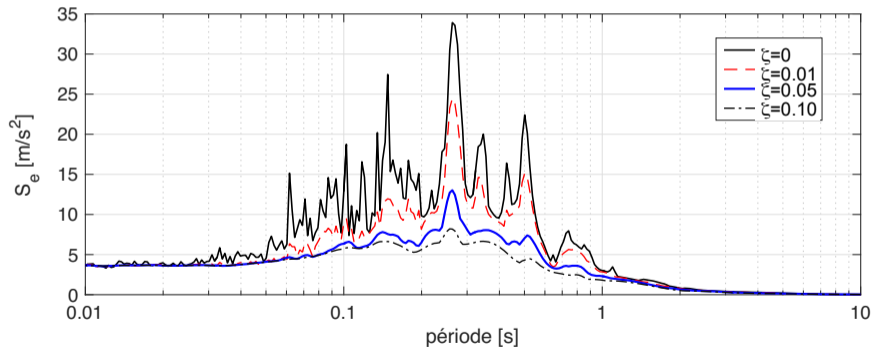


Figure 5.4: Spectre de réponse élastiques de l'accélération pour différents coefficients d'amortissement visqueux.



## 5.2.4 Exemple d'application

Le spectre de réponse regroupe les informations nécessaires au dimensionnement. Pour le séisme de Tolmezzo, l'accélération maximale subie par les structures de période fondamentale de 1 s peut être lue sur le spectre de réponse élastique de l'accélération et elle vaut  $S_e=2.31 \text{ m/s}^2$ . Avec la relation entre l'accélération spectrale ( $S_e$ ) et le déplacement spectral ( $S_u$ ), on peut calculer le déplacement relatif maximum correspondant et il vaut environ 6 cm ( $S_u=S_e/\omega_n^2=S_e/(2\pi\cdot 1)^2=2.31/(2\pi)^2=58.5 \text{ mm}$ ).

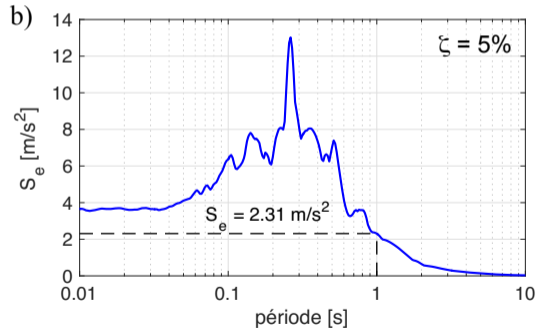
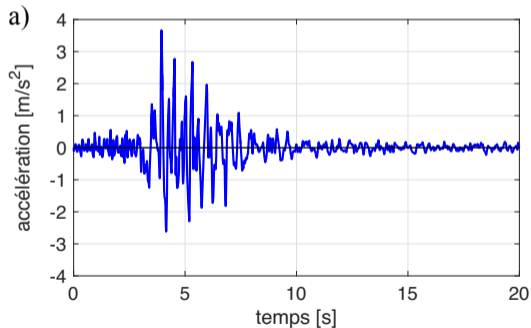


Figure 5.5: Le séisme de Tolmezzo (a) a produit une accélération maximale de  $S_e=2.31 \text{ m/s}^2$  pour  $T=1 \text{ s}$  (b).

### 5.2.5 Spectres de normes

Pour le dimensionnement, il n'est pas possible d'utiliser le spectre de réponse de l'accélération d'un séisme enregistré. Les normes de construction contiennent des formes épurées de spectres de réponse. Ces spectres ne sont pas des enveloppes au sens usuel des ingénieurs, mais doivent être considérés comme la moyenne des spectres de réponse des sollicitations pouvant survenir dans la zone considérée.

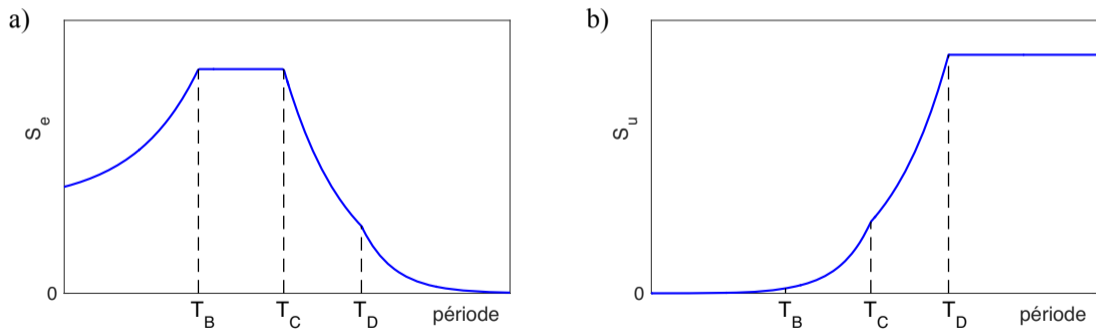


Figure 6.14: Spectres de réponse de norme (EC8, SIA 261): spectre de réponse élastique de l'accélération (a) et spectre de réponse élastique du déplacement relatif (b).

Le plateau se situe entre les périodes  $T_B$  et  $T_C$ . L'accélération du sol ( $a_{gd}$ ) y est amplifiée par 3 facteurs. Un facteur constant de 2.5, un facteur dépendant des caractéristiques du terrain de fondation ( $S$ ) et un facteur correctif ( $\eta$ ) tenant compte du coefficient d'amortissement considéré. A partir de la période  $T_D$  commence le domaine de déplacement spectral constant.

Dans la norme SIA 261, les expressions du spectre de réponse élastique de l'accélération sont:

$$S_e = a_{gd} \cdot S \cdot \left[ 1 + \frac{(2.5\eta - 1) \cdot T}{T_B} \right] \quad (0 \leq T \leq T_B) \quad (6.5)$$

$$S_e = 2.5 \cdot a_{gd} \cdot S \cdot \eta \quad (T_B \leq T \leq T_C) \quad (6.6)$$

$$S_e = 2.5 \cdot a_{gd} \cdot S \cdot \eta \cdot \frac{T_C}{T} \quad (T_C \leq T \leq T_D) \quad (6.7)$$

$$S_e = 2.5 \cdot a_{gd} \cdot S \cdot \eta \cdot \frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \quad (T_D \leq T) \quad (6.8)$$

Les valeurs des paramètres ( $S$ ,  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$ ) dépendent de la classe de terrain de fondation. Elles sont définies dans le tableau 24 de la norme SIA 261:

Classe de terrain de fondat.	Description du profil stratigraphique	$v_{s,30}$ [m/s]	$N_{SPT}$ [nombre de coups /0,3m]	$c_u$ [kN/m <sup>2</sup> ]	S	$T_B$ [s]	$T_C$ [s]	$T_D$ [s]	$l_g$ [m]
A	Rocher ou formation géologique similaire avec une couverture de terrain meuble d'au plus 5 m d'épaisseur en surface	> 800	–	–	1,00	0,15	0,4	2,0	600
B	Dépôts de sable et gravier très compact ou d'argile très ferme, d'une épaisseur d'au moins quelques dizaines de mètres, caractérisés par une augmentation progressive des propriétés mécaniques avec la profondeur	500...800	> 50	> 250	1,20	0,15	0,5	2,0	500
C	Dépôts de sable et gravier moyennement compact à compact ou d'argile ferme, d'une épaisseur de quelques dizaines à plusieurs centaines de mètres	300...500	15...50	70...250	1,15	0,20	0,6	2,0	400
D	Dépôts de terrain meuble non cohésif lâche à moyennement compact (avec ou sans couches cohérentes tendres) ou à prédominance de terrain meuble cohésif de consistance tendre à ferme	< 300	< 15	< 70	1,35	0,20	0,8	2,0	300
E	Couche superficielle de terrain meuble avec des valeurs de $v_s$ correspondant à la classe C ou D et une épaisseur comprise entre 5 m et 20 m, reposant sur un matériau plus ferme avec une valeur $v_s > 800$ m/s	–	–	–	1,40	0,15	0,5	2,0	500

Les cinq différents spectres de réponse élastiques de l'accélération pour un coefficient d'amortissement de  $\zeta=5\%$  de la norme SIA 261 sont:

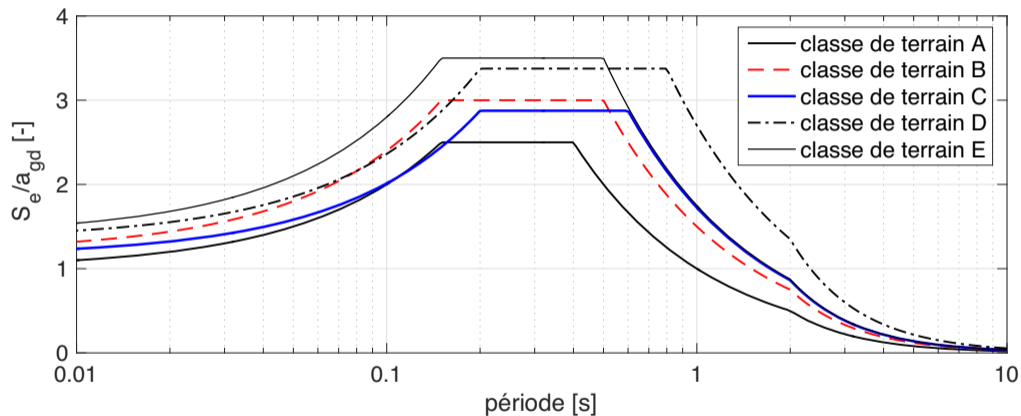


Figure 6.16: Spectres de réponse élastiques de l'accélération de la norme SIA 261 pour  $\zeta=5\%$ .

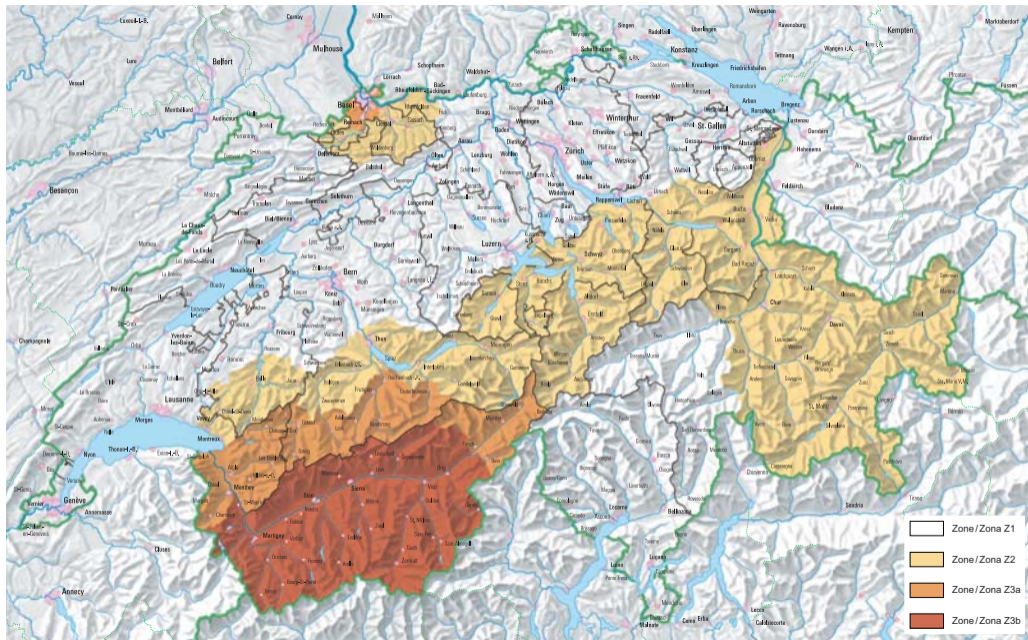
Le paramètre  $\eta$  est un coefficient correctif qui permet de considérer un coefficient d'amortissement visqueux différent de  $\zeta=5\%$ . Il prend la valeur de  $\eta=1$  pour  $\zeta=5\%$ :

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{0.5 + 10\zeta}} \geq 0.55 \quad (6.9)$$

Le paramètre  $a_{gd}$  représente la valeur de calcul de l'accélération horizontale du sol qui est spécifiée en fonction de la zone d'aléa sismique.

Tableau 6.2: SIA 261, valeur de calcul de l'accélération du sol en fonction de la zone d'aléa sismique.

<b>Zone</b>	<b><math>a_{gd}</math> [m/s<sup>2</sup>]</b>
Z1	0.6
Z2	1.0
Z3a	1.3
Z3b	1.6



## 5.2.6 Spectre de réponse et spectre de Fourier

Certaines informations initiales sont perdues avec le spectre de réponse alors que ce n'est pas le cas du spectre de *Fourier* qui est une représentation alternative de la fonction temporelle de l'accélérogramme. Cependant sans amortissement, le spectre de réponse coïncide avec le spectre d'amplitude de *Fourier*.

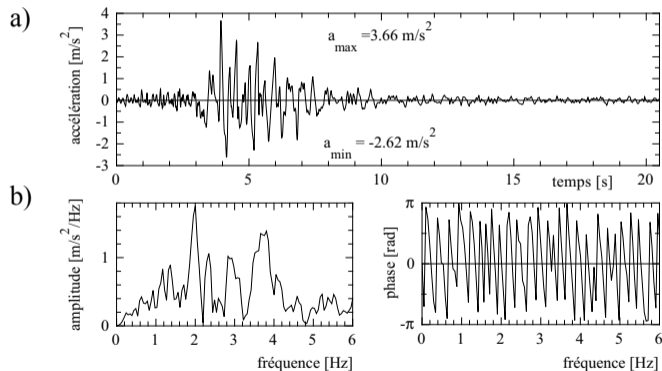


Figure 5.6: Le spectre de Fourier conserve toutes les informations de l'accélérogramme (a); amplitude et phase (b).



## 5.2.7 Spectre de plancher

Le spectre de réponse “habituel” ne peut pas être utilisé pour l’analyse d’éléments non-structuraux, car le point d’application de la sollicitation sismique ne correspond pas au point de fixation des installations à la structure principale. Il faut avoir recours au “spectre de plancher” (ou *floor response spectrum*).

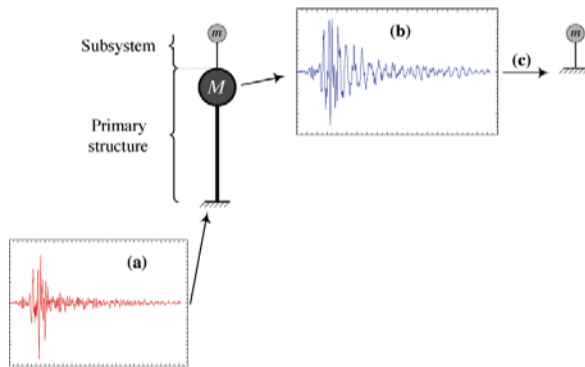


Figure 5.7: La détermination du spectre de plancher peut s’effectuer en deux étapes si la masse de l’élément non-structural est négligeable devant celle de la structure principale.

Pour établir un spectre de plancher à partir d'un accélérogramme, on peut procéder en deux étapes si la masse de l'élément non-structural est beaucoup plus petite que celle de la structure principale. La première étape consiste à déterminer la réponse de la structure principale donnée soumise à l'accélérogramme appliqué à la base de celle-ci. On considère alors l'accélération absolue au cours du temps au point de fixation de l'élément non-structural à examiner comme nouvel accélérogramme. La deuxième étape est celle du spectre de réponse "habituel" avec ce nouvel accélérogramme. Attention c'est bien **l'accélération absolue et non l'accélération relative** qu'il faut considérer au point de fixation de l'élément non-structural dans la première étape. Par conséquent, selon la méthode de résolution employée, il faut encore veiller à ajouter l'accélération du sol à l'accélération relative obtenue.

La détermination de l'accélération absolue au point de fixation de l'élément non-structural peut aussi être effectuée directement à partir d'un modèle d'éléments finis de la structure principale par exemple.

L'allure des spectres de plancher est aisément reconnaissable aux pics prononcés, liés aux périodes propres de la structure principale. En effet, la sollicitation sismique agissant à la base de la structure principale est transmise à l'élément non-structural par l'intermédiaire des mouvements de la structure principale qui agit comme un filtre mécanique en amplifiant les accélérations dans la gamme de ses fréquences propres.

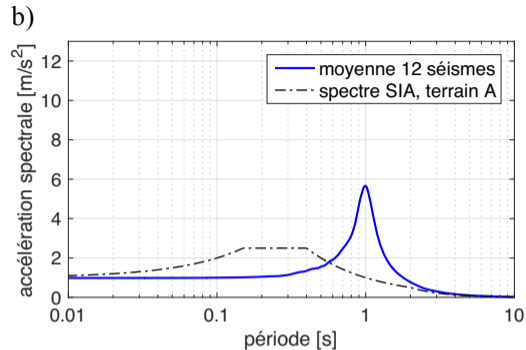
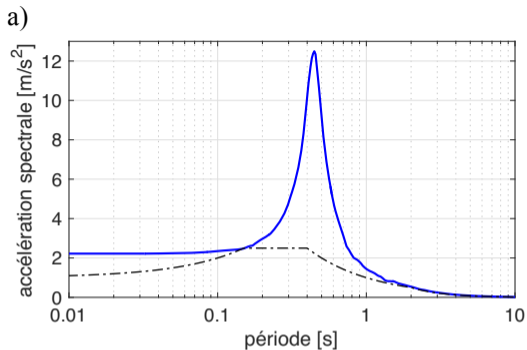


Figure 5.8: Spectres de plancher déterminés avec une moyenne de 12 séismes compatibles avec un spectre de réponse de la norme SIA 261; période propre de la structure principale 0.45 s (a) et 1 s (b).

Les normes de construction proposent des expressions forfaitaires, faisant office de spectres de plancher, pour le dimensionnement des éléments non-structuraux, par exemple. Les valeurs maximales des expressions des normes sont toutefois souvent plus petites que celles des spectres de plancher calculés, parce qu’il est implicitement admis que la résonance “pure” est en réalité peu probable.

## 5.3 Méthode du spectre de réponse

Pour le dimensionnement, seule la réponse maximale est importante et elle peut être estimée plus rapidement à l'aide de la méthode dite du spectre de réponse qu'avec l'analyse modale. La réponse modale maximale s'obtient directement par le spectre de réponse, un spectre de norme par exemple. En fonction de leur position dans le spectre, les valeurs spectrales indiquent les amplifications des différents modes.

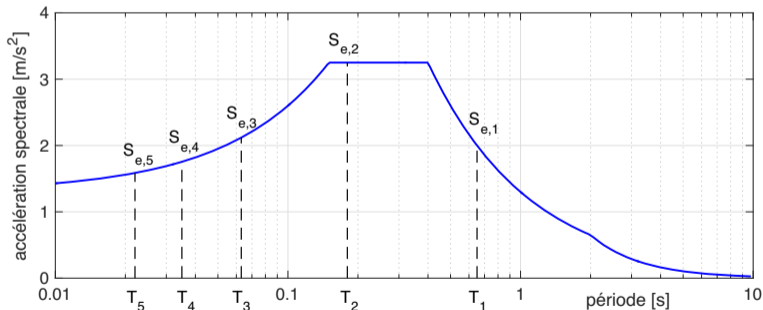


Figure 5.9: La méthode du spectre de réponse permet d'évaluer la réponse maximale d'une structure. La position des modes dans le spectre de réponse détermine les valeurs spectrales associées aux réponses modales maximales.

Les valeurs spectrales du déplacement ( $S_{u,n} = S_{e,n} / \omega_n^2$ ) donnent la réponse modale maximale:

$$z_{n, \max} = \frac{|r_n|}{m_n^*} \cdot S_{u, n}(\omega_n, \xi) = \frac{|r_n|}{\omega_n^2 \cdot m_n^*} \cdot S_{e, n}(\omega_n, \xi) \quad (5.6)$$

A partir de ces valeurs, les déplacements relatifs d'étage maximaux de chaque mode sont donnés par:

$$x_{-n, \max} = \underline{A}_{-n} \cdot z_{n, \max} \quad \text{ou plus en détail:} \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} x_{1n, \max} \\ x_{2n, \max} \\ x_{3n, \max} \\ x_{4n, \max} \\ x_{5n, \max} \end{bmatrix} = x_{-n, \max} = \underline{A}_{-n} \cdot z_{n, \max} = \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \\ A_{5n} \end{bmatrix} \cdot z_{n, \max}$$

### 5.3.1 Règle de superposition

L'unique différence avec l'analyse modale réside donc dans la prise en compte des seuls maxima. Dans l'analyse modale, la réponse totale s'obtient ensuite en superposant les réponses des différents modes. Cette étape ne peut pas être appliquée dans la méthode du spectre de réponse car les maxima de chaque mode ne coïncident pas dans le temps. La simple addition des réponses modales maximales conduirait à des valeurs trop défavorables. Par conséquent une superposition différente doit être utilisée. La règle la plus courante est celle de la superposition quadratique (racine carrée de la somme des carrés ou SRSS: *square root of the sum of the squares*):

$$x_{j, \max, \text{tot}} = \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_{jn, \max}|^2} \quad (5.8)$$

A cause de la non-simultanéité d'occurrence des réponses modales maximales et de l'approximation introduite par la règle de superposition (SRSS), les forces maximales ne peuvent pas être calculées avec les déplacements relatifs maximaux issus de l'équation (5.8),  $F_{\max, \text{tot}} \neq K \cdot x_{\max, \text{tot}}$  !!!

Il faut déterminer les forces maximales dans chaque mode à partir de la matrice de rigidité:

$$\underline{F}_{-n, \max} = \underline{K} \cdot \underline{x}_{-n, \max} = \underline{K} \cdot \underline{A}_n \cdot z_{n, \max} = \underline{K} \cdot \underline{A}_n \cdot \frac{|r_n|}{\omega_n^2 \cdot m_n^*} \cdot S_{e, n}(\omega_n, \xi) \text{ ou plus en détail: } \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} F_{1n, \max} \\ F_{2n, \max} \\ F_{3n, \max} \\ F_{4n, \max} \\ F_{5n, \max} \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \begin{bmatrix} x_{1n, \max} \\ x_{2n, \max} \\ x_{3n, \max} \\ x_{4n, \max} \\ x_{5n, \max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \\ A_{5n} \end{bmatrix} \cdot z_{n, \max}$$

pour les superposer ensuite selon la règle SRSS:

$$F_{j, \max, \text{tot}} = \sqrt{\sum_{n=1}^N |F_{jn, \max}|^2} \quad (5.10)$$

La figure 5.10a illustre schématiquement la détermination des forces d'étage maximales par une superposition quadratique. Il faut souligner que la superposition quadratique des efforts tranchants à la base n'est pas identique à l'effort tranchant à la base de la superposition quadratique (figure 5.10b).

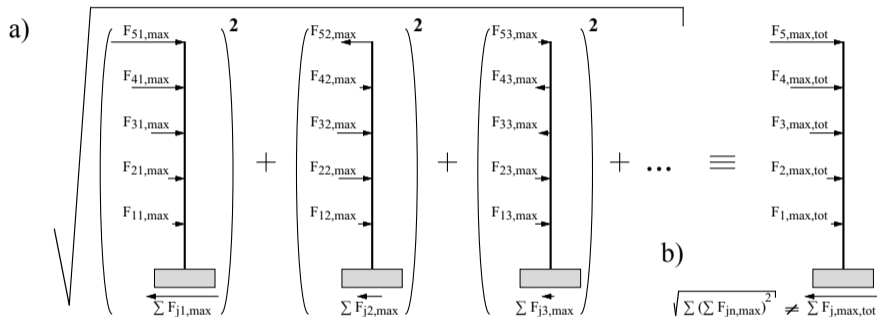


Figure 5.10: Représentation schématique de la superposition quadratique pour déterminer les forces d'étage maximales dans la méthode du spectre de réponse.



### 5.3.2 Méthode des forces de remplacement

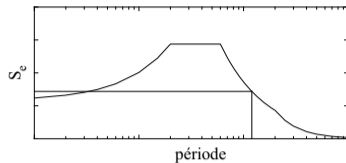
La méthode du spectre de réponse nécessite une analyse détaillée du comportement dynamique de la structure et une telle complication ne se justifie pas pour les cas courants. Pour l'excitation sismique notamment, les sollicitations maximales sont essentiellement issues de celles du premier mode. Il est donc souvent légitime de limiter l'analyse au premier mode. C'est la première simplification de la méthode des forces de remplacement. Une simplification supplémentaire consiste à substituer la masse totale de la structure à la masse modale. De cette manière, les efforts maximaux peuvent être aisément évalués sans analyse dynamique.

Dans la méthode la force globale de remplacement ( $F_d$ ) est calculée à partir de la période fondamentale ( $T_1$ ) qui permet de déterminer l'accélération spectrale du spectre de réponse ( $S_e$ ):

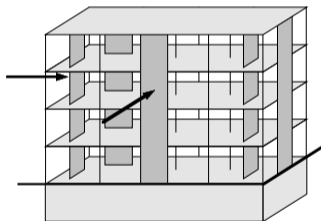
$$F_d = S_e \cdot M_{\text{tot}} = S_e(T_1) \cdot \sum_j m_j \quad (5.11)$$

La force globale de remplacement est ensuite répartie sur la hauteur du bâtiment en fonction des masses d'étage et de leur hauteur par rapport à l'horizon d'encastrement. Dans le cas d'un bâtiment régulier la répartition est linéaire. Les efforts internes de dimensionnement sont ensuite déterminés à partir de cette répartition des forces d'étage.

### 1. Accélération spectrale:



### 2. Force globale de remplacement:



### 3. Répartition sur la hauteur:

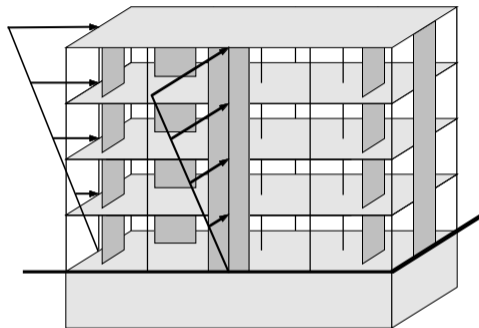


Figure 5.11: Les 3 étapes de la méthode des forces de remplacement pour l'analyse sismique simplifiée.

## 5.4 Exemples numériques

### 5.4.1 Bâtiment régulier

Cet exemple concerne l'analyse modale du bâtiment de cinq étages traité précédemment. Il est stabilisé dans chaque direction par deux refends en béton armé et est situé à Château-d'Oex (VD). En plus des propriétés déjà spécifiées, il faut ajouter les deux caractéristiques suivantes:

- zone 3a,  $a_{gd}=1.3\text{ m/s}^2$  (c.f. tableau 6.2)
- classe de terrain de fondation A (voir figures 6.15 et 6.16)

Les grandeurs dynamiques ont été déterminées auparavant. Cependant pour considérer l'effet de la fissuration, une rigidité effective correspondant à 30% de l'état non fissuré ( $EI=0.3\cdot EI_0$ ) est adoptée ici. Les pulsations, les fréquences et les valeurs spectrales correspondantes deviennent:

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 5.354 \\ 34.187 \\ 96.866 \\ 187.195 \\ 278.783 \end{bmatrix} \quad [\text{rad/s}] \quad \underline{f} = \frac{1}{2\pi} \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0.852 \\ 5.441 \\ 15.417 \\ 29.793 \\ 44.370 \end{bmatrix} \quad [\text{Hz}] \quad \underline{S}_e = \begin{bmatrix} 1.108 \\ 3.250 \\ 2.144 \\ 1.737 \\ 1.593 \end{bmatrix} \quad [\text{m/s}^2]$$

La position des périodes dans le spectre de réponse de l'accélération détermine les valeurs spectrales à prendre en compte pour la détermination des maxima modaux. Les caractéristiques dynamiques du bâtiment de l'exemple nécessaires à l'analyse sismique sont résumées ci-dessous.

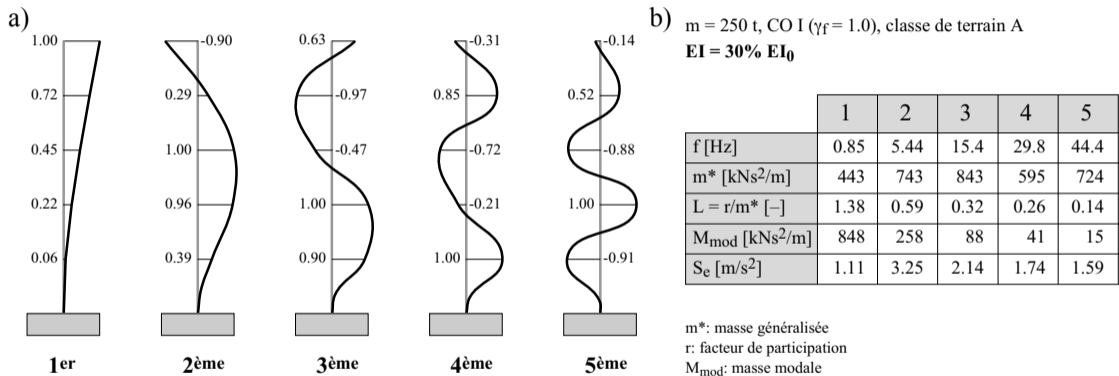


Figure 5.12: Les cinq modes propres normalisés du bâtiment d'exemple (a). Caractéristiques dynamiques essentielles pour l'analyse sismique (b).

La réponse modale maximale s'obtient à partir de l'équation (5.6), dans laquelle il faut introduire les valeurs spectrales de l'accélération ( $S_{e,n}$ ):

$$z_{n, \max} = \frac{|r_n|}{m_n^*} \cdot S_{u, n} = \frac{|r_n|}{\omega_n^2 \cdot m_n^*} \cdot S_{e, n} \Rightarrow z_{\max} = \begin{bmatrix} 53487.0 \\ 1638.7 \\ 65.3 \\ 10.5 \\ 2.3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad [\text{m}]$$

A partir des déplacements maximaux, la matrice de rigidité permet de déterminer les efforts maximaux dans chaque mode en utilisant l'équation (5.9). Par exemple pour le premier mode ( $n=1$ ):

$$\begin{bmatrix} F_{11, \max} \\ F_{21, \max} \\ F_{31, \max} \\ F_{41, \max} \\ F_{51, \max} \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{A}}_1 \cdot z_{1, \max} = \underline{\underline{K}} \cdot \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.22 \\ 0.45 \\ 0.72 \\ 1.00 \end{bmatrix} \cdot 53487.0 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{6 \cdot 0.3 \cdot EI}{h^3} \cdot \begin{bmatrix} 3.1381 & -1.9834 & 0.7956 & -0.1989 & 0.0331 \\ -1.9834 & 2.4420 & -1.7845 & 0.6961 & -0.1160 \\ 0.7956 & -1.7845 & 2.3425 & -1.5856 & 0.4309 \\ -0.1989 & 0.6961 & -1.5856 & 1.6464 & -0.6077 \\ 0.0331 & -0.1160 & 0.4309 & -0.6077 & 0.2680 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.22 \\ 0.45 \\ 0.72 \\ 1.00 \end{bmatrix} \cdot 53487.0 \cdot 10^{-6} = \begin{bmatrix} 23.4 \\ 85.2 \\ 172.8 \\ 275.1 \\ 383.3 \end{bmatrix} \text{ [kN]}$$

## Instructions MatLab

```

%*****
% matrice de multiplication des forces modales: rSd=(r/m*)*Sd
%*****
%
rSd=eye(n);
for I=1:n,
    rSd(I,I)=rSm(I)/(2*pi*frequ(I))^2*Sd(I);
end
%*****
% forces modales
%*****
Fmod=K*phi*rSd;

```

Les forces d'étage maximales et les moments de flexion correspondants dans chaque mode montrent une répartition des efforts typique de bâtiments réguliers pour lesquels la réponse sismique est dominée par le premier mode. Cette prédominance est très marquée pour les moments de flexion. Ce n'est pas le cas pour les efforts d'étages, car les efforts d'étages du 2<sup>ème</sup> mode dépassent ceux du 1<sup>er</sup> mode. Par ailleurs, les efforts tranchants à la base dans chaque mode sont proportionnels à la masse modale correspondante. Ils résultent de la multiplication des masses modales par les valeurs spectrales associées.

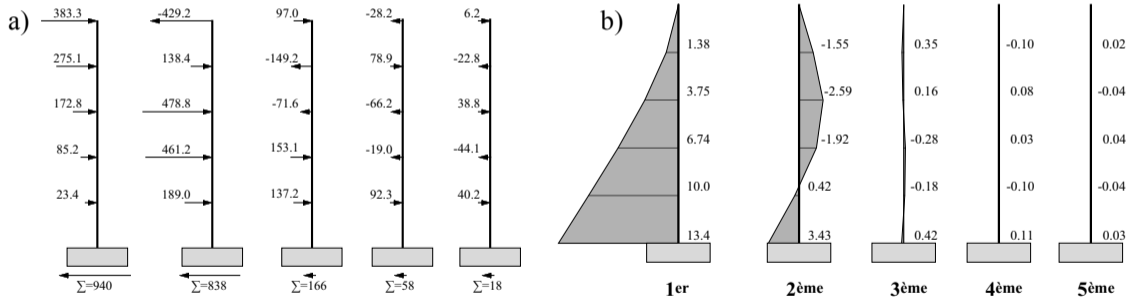


Figure 5.13: Efforts maximaux dans chaque mode déterminés par la méthode du spectre de réponse: (a) forces d'étage [kN] et (b) moments de flexion [MNm] correspondants.

Les maxima de chaque mode n'apparaissent généralement pas au même instant et il est trop défavorable de simplement les additionner. Afin d'évaluer les efforts maxima de manière plus réaliste, il faut superposer les efforts selon la règle SRSS. On obtient les valeurs suivantes pour les forces d'étages ( $F_{\max}$ ), les efforts tranchants ( $V_{\max}$ ) et les moments de flexion ( $M_{\max}$ ):

$$\underline{F}_{\max} = \begin{bmatrix} 255.4 \\ 495.7 \\ 519.7 \\ 351.9 \\ 584.3 \end{bmatrix} \quad [\text{kN}] \quad \underline{V}_{\max} = \begin{bmatrix} 1271.4 \\ 1124.1 \\ 861.6 \\ 723.6 \\ 584.3 \end{bmatrix} \quad [\text{kN}] \quad \underline{M}_{\max} = \begin{bmatrix} 13.865 \\ 10.052 \\ 7.015 \\ 4.563 \\ 2.103 \end{bmatrix} \quad [\text{MNm}]$$

## Instructions MatLab

```
%*****
% superposition des forces selon la regle SRSS: Fsrss
%*****
Fsrss=sqrt(sum((Fmod.*Fmod)'));
%
```



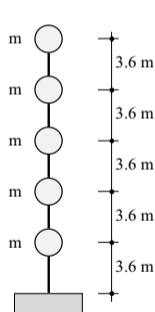
## Méthode des forces de remplacement

Avec la méthode des forces de remplacement les efforts internes sont nettement plus élevés que ceux résultants de la méthode du spectre de réponse. Les efforts issus de la méthode du spectre de réponse correspondent aux 3/4 ( $13.9/18.3=0.76$ ) des moments de flexion et aux 90% ( $1.27/1.39=0.91$ ) des efforts tranchants issus de la méthode des forces de remplacement.

$m = 250 \text{ t}$ , CO I ( $\gamma_f = 1.0$ ), classe de terrain A  
 $F_d = 1.108/10 \cdot 5 \cdot 2500 \approx 1.39 \text{ MN}$

étage	$z_i$ [m]	$F_{di}$ [MN]	$V_d$ [MN]	$M_d$ [MNm]
5	18.0	0.463	0.463	1.67
4	14.4	0.371	0.834	4.67
3	10.8	0.278	1.112	8.67
2	7.2	0.185	1.297	13.34
1	3.6	0.093	1.390	18.35
$\Sigma$ 54		$\Sigma$ 1.390		

a)



b)

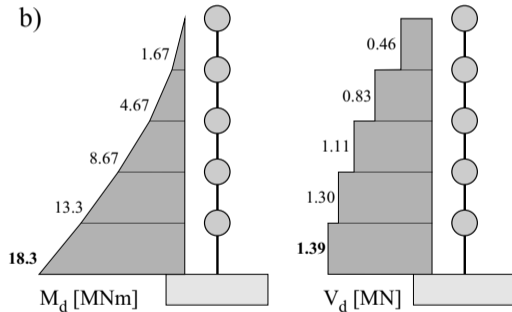


Figure 5.14: Méthode des forces de remplacement pour le bâtiment traité en exemple. Détermination des forces et des efforts intérieurs (a). Diagrammes des efforts internes (b).

## 5.4.2 Bâtiment irrégulier

Par rapport au bâtiment régulier, les masses du 2<sup>e</sup> et du 5<sup>e</sup> étage sont fortement augmentées pour obtenir un bâtiment très irrégulier. Les caractéristiques dynamiques nécessaires à l'analyse sismique sont:

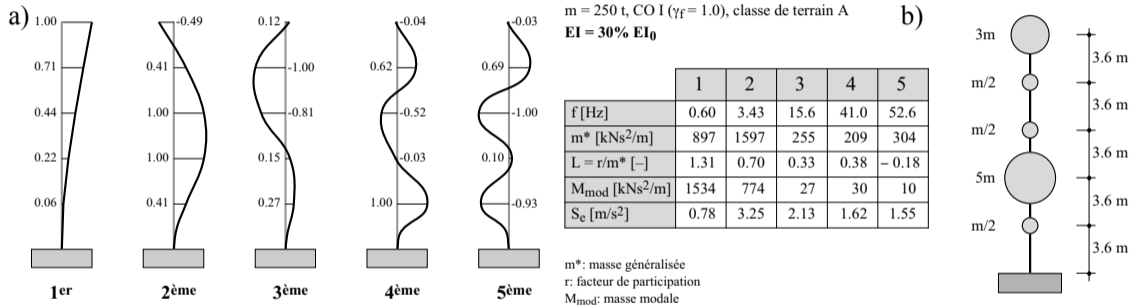


Figure 5.15: Les cinq modes propres normalisés du bâtiment irrégulier (a) et ses caractéristiques dynamiques (b).

Le changement le plus important concerne les masses modales. La masse modale du 2<sup>e</sup> mode a pris de l'importance par rapport à celle du premier et celles des trois derniers sont encore plus négligeables.

La réponse modale maximale s'obtient de la même manière que pour le bâtiment régulier. La répartition des forces d'étage est très affectée par les irrégularités dans le 2<sup>e</sup> mode où la force au deuxième étage domine nettement. Le 2<sup>e</sup> mode devient prépondérant en ce qui concerne l'effort tranchant à la base. Quant aux moments de flexion, les irrégularités ont amplifié les moments du 2<sup>e</sup> mode par rapport aux autres. Cependant, les moments du premier mode restent toujours nettement prépondérants. C'est une caractéristique générale, les modes supérieurs ont surtout une influence sur les efforts tranchants.

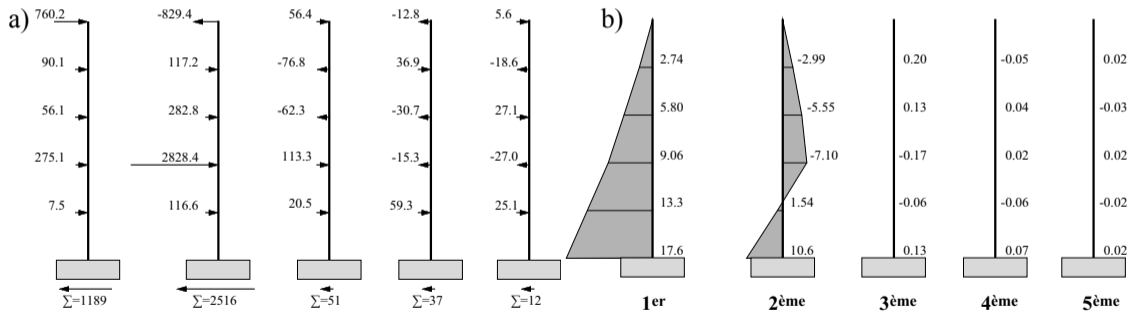


Figure 5.16: Bâtiment irrégulier, efforts maximaux dans chaque mode déterminés par la méthode du spectre de réponse: (a) forces d'étage [kN] et (b) moments de flexion [MNm] correspondants.

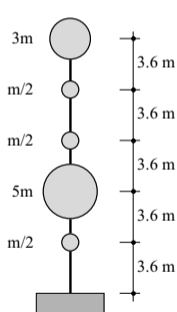
## Méthode des forces de remplacement

Le rapport entre la masse modale et la masse totale reste environ à  $2/3$  ( $1534/2375=0.65$ ). Les efforts de la méthode du spectre de réponse correspondent à un peu plus des  $3/4$  ( $20.5/24.7=0.83$ ) des moments de flexion mais, en revanche, à  $150\%$  ( $2.78/1.84=1.51$ ) des efforts tranchants de la méthode des forces de remplacement. La méthode des forces de remplacement sous-estime donc les efforts tranchants.

$m = 250$  t, CO I ( $\gamma_f = 1.0$ ), classe de terrain A  
 $F_d = 0.775/10 \cdot 23.75 \approx 1.84$  MN

étage	$z_i$ [m]	$G_i$ [MN]	$z_i \cdot G_i$	$F_{di}$ [MN]	$M$ [MNm]
5	18.0	7.50	135.0	0.952	3.43
4	14.4	1.25	18.0	0.127	7.31
3	10.8	1.25	13.5	0.095	11.5
2	7.2	12.50	90.0	0.634	18.0
1	3.6	1.25	4.5	0.032	24.7
$\Sigma$ 54		$\Sigma$ 23.75	$\Sigma$ 261	$\Sigma$ 1.84	

a)



b)

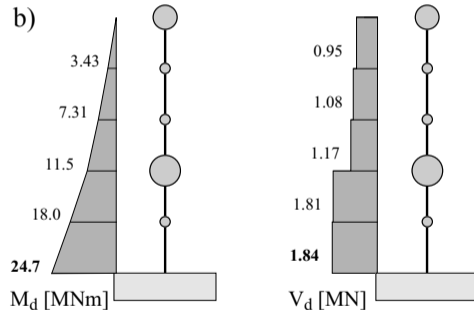


Figure 5.17: Méthode des forces de remplacement pour le bâtiment irrégulier. Détermination des forces et des efforts intérieurs (a). Diagrammes des efforts internes (b).