

4.3 Oscillations libres amorties

Les oscillations libres amorties concernent les systèmes dans lesquelles les vibrations s'atténuent progressivement au cours du temps:

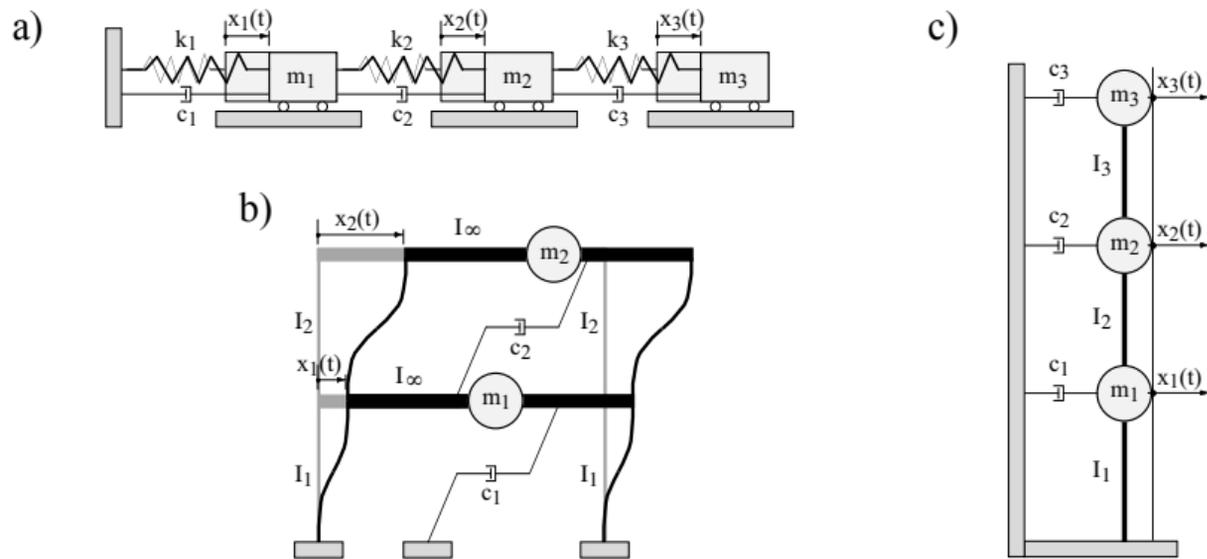


Figure 4.10: Oscillateurs multiples à trois (ou deux) masses concentrées avec amortissement. Représentation traditionnelle orientée mécanique (a) et représentations orientées structure (b et c).

4.3.1 Equation du mouvement

Le système d'équations différentielles s'établit à partir des forces agissant sur chacune de ses masses:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{C} \cdot \underline{\dot{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = 0 \quad (4.10)$$

\underline{M} est la matrice des masses, \underline{K} la matrice de rigidité, \underline{C} la matrice d'amortissement et \underline{x} le vecteur des déplacements.

4.3.2 Amortissement classique et non classique

Avec l'amortissement, le système d'équations n'est pas obligatoirement découplable. Si c'est le cas, l'amortissement est dit *classique*. Dans le cas contraire, il s'agit d'amortissement *non classique* et il faut avoir recours à des méthodes d'analyse numérique sophistiquées.

Dans le cas d'un amortissement *non classique*, les oscillations libres amorties ne s'effectuent plus exclusivement selon le deuxième mode propre non amorti. C'est ce qui complique la résolution de tels systèmes. L'amortissement *classique* conserve les modes propres et leur propriété importante: des déplacements initiaux proportionnels au mode font osciller la structure uniquement selon ce mode.

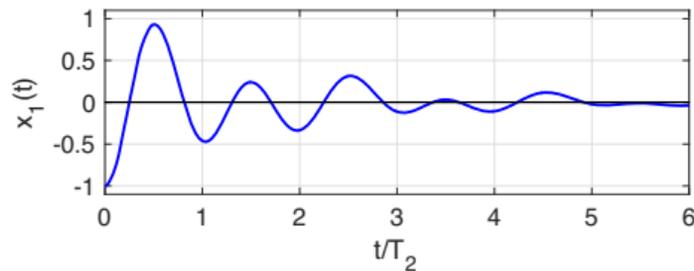
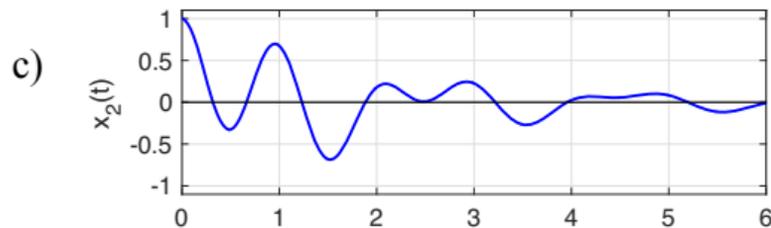
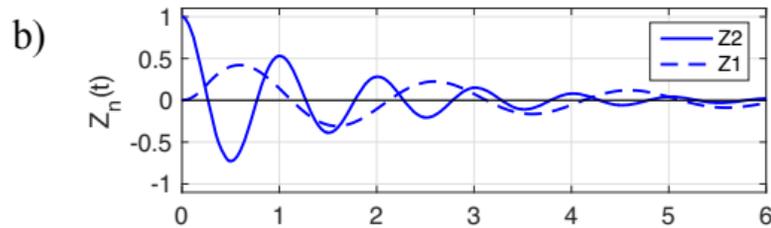
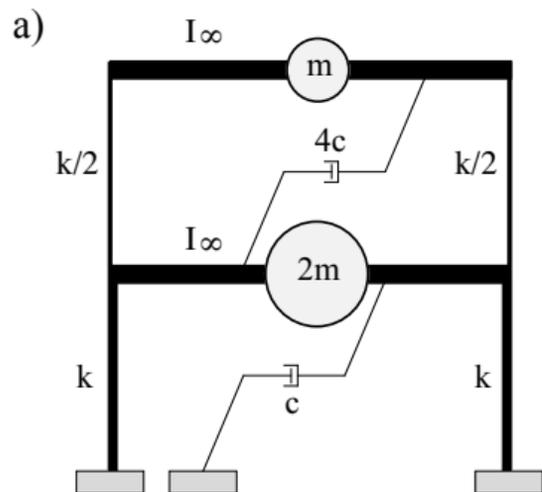


Figure 4.11: Oscillations libres du cadre bi-encasté (a) pour des déplacements initiaux proportionnels au deuxième mode propre en cas d'amortissement non classique. Coordonnées modales Z_1 et Z_2 (b) et déplacements d'étages (c) au cours du temps. Les oscillations ne s'effectuent plus uniquement selon le deuxième mode non amorti.

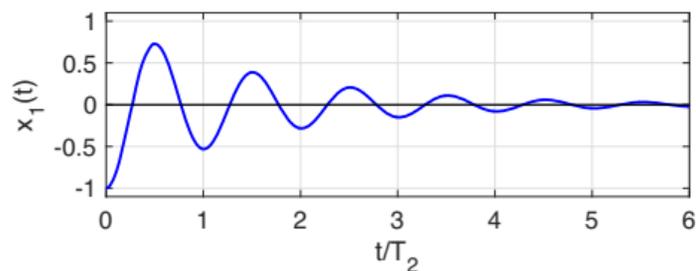
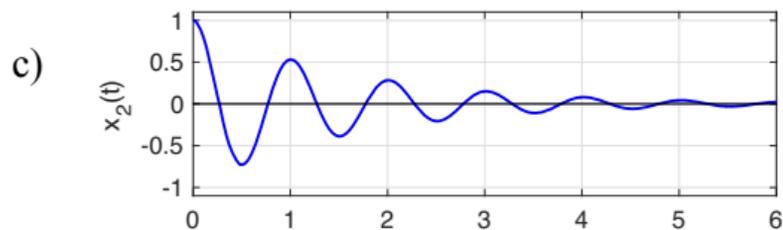
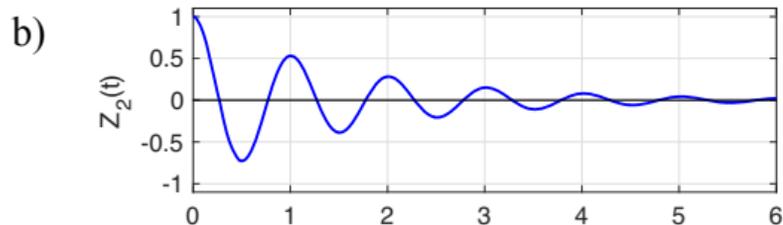
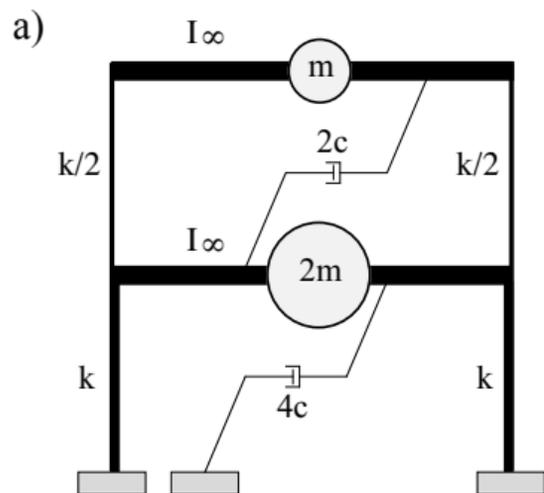


Figure 4.12: Oscillations libres du cadre bi-encasté (a) pour des déplacements initiaux proportionnels au deuxième mode propre en cas d'amortissement classique. Coordonnées modales Z_1 et Z_2 (b) et déplacements d'étages (c) au cours du temps. Les oscillations s'effectuent, cette fois, exclusivement selon le deuxième mode non amorti.

4.3.3 Amortissement de *Rayleigh*

L'amortissement de *Rayleigh* est habituellement utilisé si l'amortissement doit être explicité complètement. La matrice d'amortissement est une combinaison linéaire des matrices des masses et de rigidité:

$$\underline{C} = \alpha \cdot \underline{M} + \beta \cdot \underline{K} \quad (4.11)$$

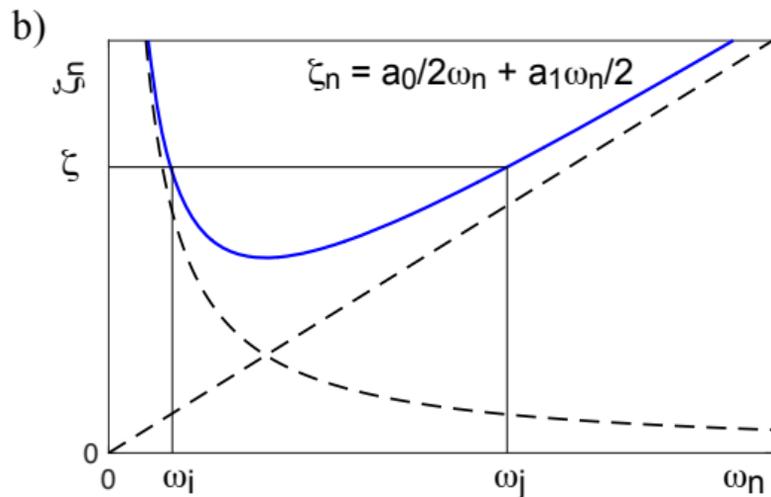
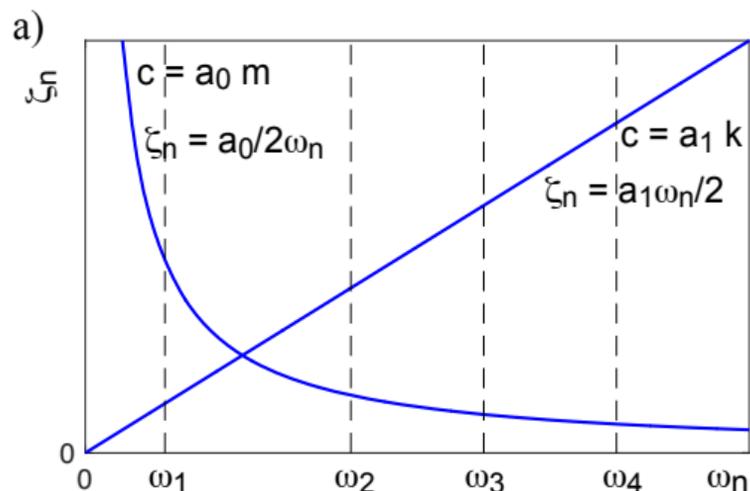


Figure 4.13: L'amortissement de *Rayleigh* est constitué d'une combinaison linéaire d'une contribution proportionnelle à m et d'une autre à k (a). Un choix judicieux permet d'obtenir un amortissement grosso modo constant (b).

4.4 Oscillations entretenues (ou forcées)

Les oscillations entretenues concernent les systèmes dans lesquelles les vibrations sont engendrées par une force extérieure harmonique:

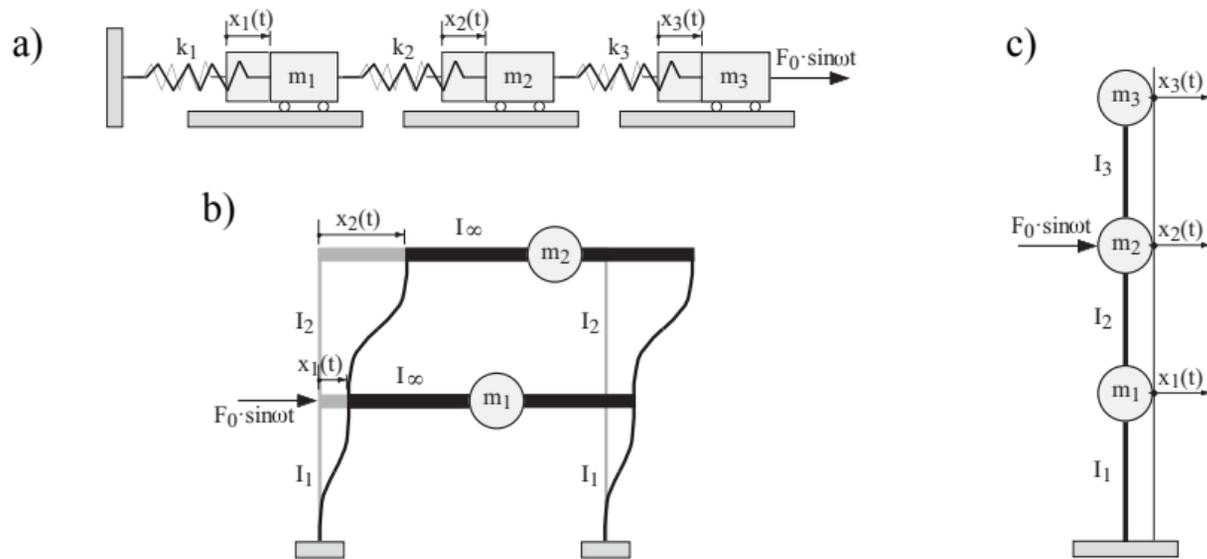


Figure 4.14: Oscillateurs multiples à trois (ou deux) masses concentrées soumis à une force harmonique. Représentation traditionnelle orientée mécanique (a) et représentations orientées structure (b, c).

4.4.1 Cadre à deux étages

Une force harmonique est appliquée au premier étage du cadre à deux étages avec des traverses infiniment rigides. En posant $k_1 = \Sigma 12 \cdot EI_1 / h^3$ et $k_2 = \Sigma 12 \cdot EI_2 / h^3$, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cdot \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

En choisissant une solution harmonique de la forme:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1, \max} \\ x_{2, \max} \end{bmatrix} \cdot \sin \omega t \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations s'exprime de la manière suivante:

$$[\underline{K} - \omega^2 \cdot \underline{M}] \cdot \begin{bmatrix} x_{1, \max} \\ x_{2, \max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 \cdot m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1, \max} \\ x_{2, \max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les amplitudes maximales des déplacements d'étage ($x_{1,\max}$ et $x_{2,\max}$) s'obtiennent par la résolution du système d'équations ci-dessus:

$$\begin{bmatrix} x_{1,\max} \\ x_{2,\max} \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \cdot \underline{\mathbf{M}}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \cdot \underline{\mathbf{M}}|} \cdot \begin{bmatrix} k_2 - \omega^2 \cdot m_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot m_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le déterminant $|\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \cdot \underline{\mathbf{M}}|$ peut s'écrire en fonction des deux fréquences propre du système (ω_1 et ω_2):

$$|\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \cdot \underline{\mathbf{M}}| = m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) \cdot (\omega^2 - \omega_2^2)$$

Les fréquences propres proviennent de la résolution du problème aux valeurs propres $|\underline{\mathbf{K}} - \omega_n^2 \cdot \underline{\mathbf{M}}| = 0$.

Finalement, les amplitudes maximales des déplacements d'étage prennent la forme suivante:

$$x_{1,\max} = \frac{F_0 \cdot (k_2 - \omega^2 \cdot m_2)}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) \cdot (\omega^2 - \omega_2^2)} \qquad x_{2,\max} = \frac{F_0 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) \cdot (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

L'évolution des amplitudes maximales d'étage montre que pour un rapport de fréquences précis, le déplacement du premier étage est nul.

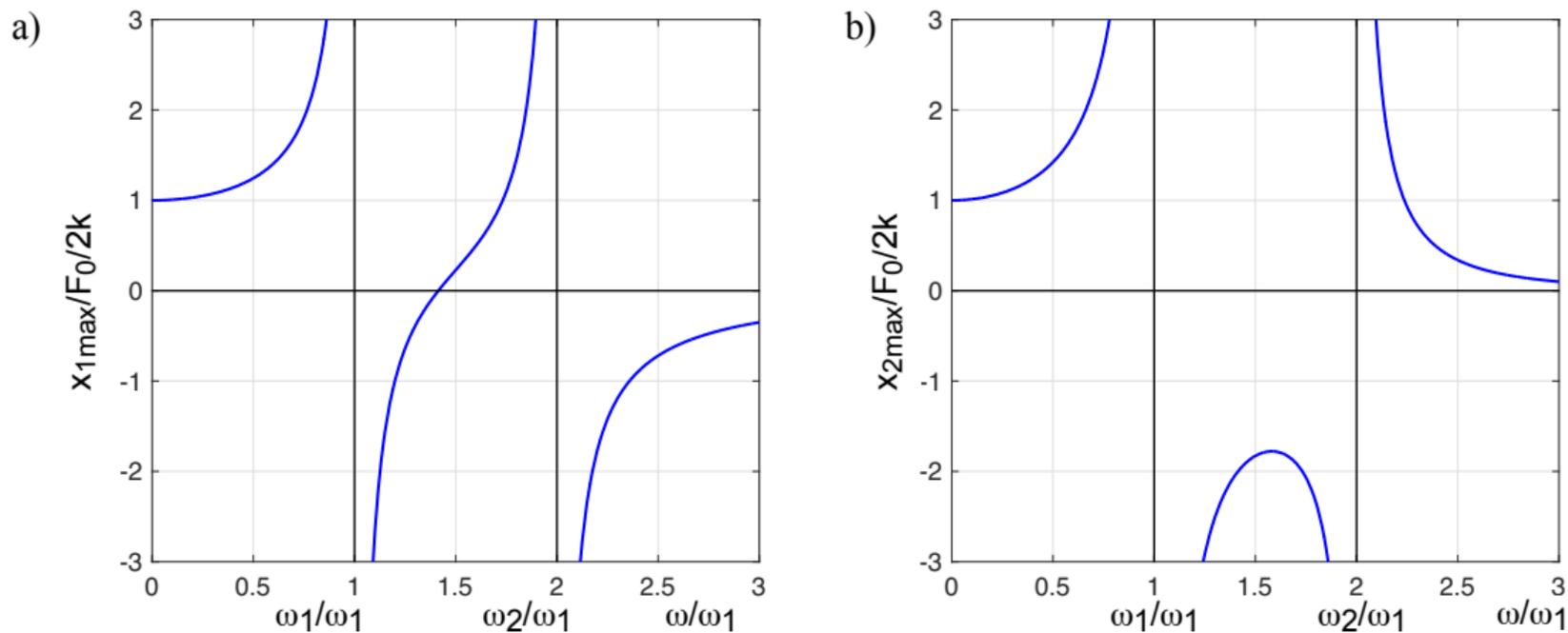
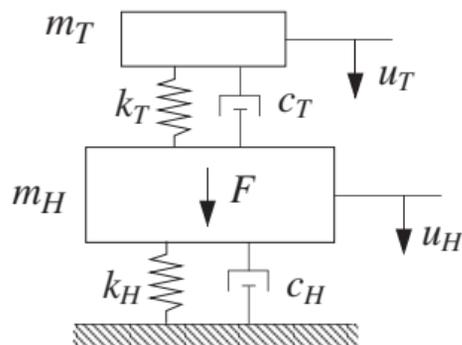


Figure 4.15: Facteur d'amplification dynamique en fonction du rapport de la fréquence de la force perturbatrice et de la première fréquence propre de la structure; déplacements du 1^{er} étage (a) et du 2^e étage (b).

4.4.2 Amortisseur à masse accordée

a)



b)

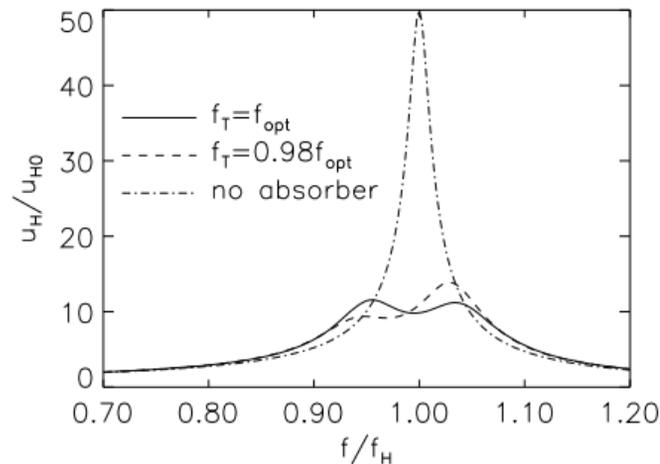


Figure 4.16: Amortisseur à masse accordée, définitions (a) et facteur d'amplification dynamique associé (b).

Les paramètres optimaux de l'amortisseur massique ont été établis dès 1940 par *Den Hartog* ($\zeta_H=0$):

$$f_{opt} = \frac{1}{1 + m_T/m_H} \cdot f_H$$

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3 \cdot m_T/m_H}{8 \cdot (1 + m_T/m_H)^3}} \quad (4.12)$$

Les paramètres optimaux de l'équation restent pratiquement valables en présence d'un faible amortissement de la structure principale. L'écart par rapport à la courbe sans amortissement reste limité, même pour une valeur de l'amortissement de 5%.

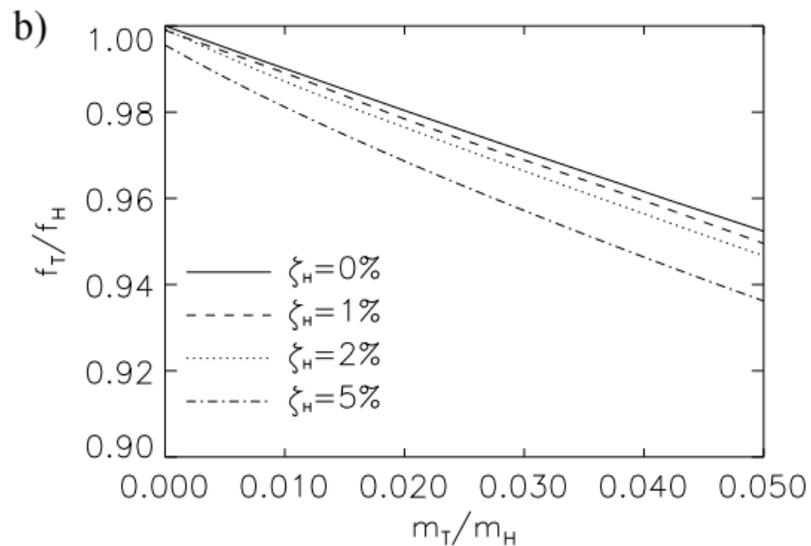
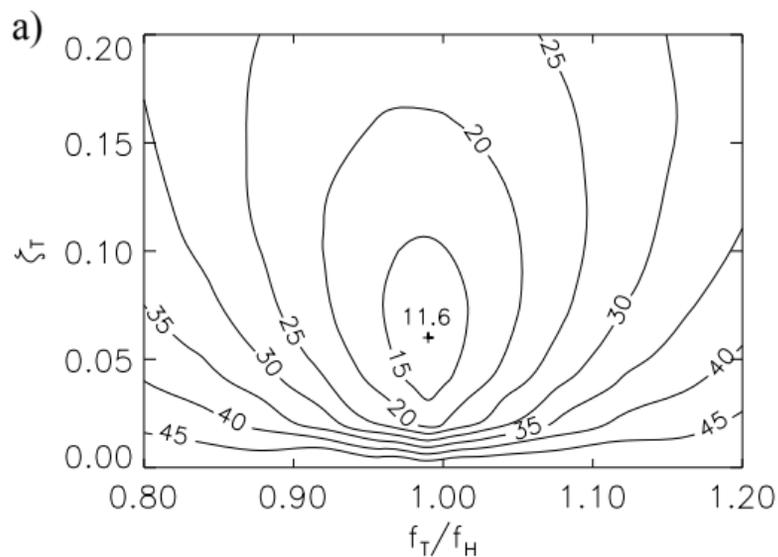


Figure 4.17: Variation du facteur d'amplification dynamique en fonction du rapport f_T/f_H et de l'amortissement ζ_T
 (a). Evolution du rapport optimal de fréquences en présence d'amortissement de la structure principale (b).

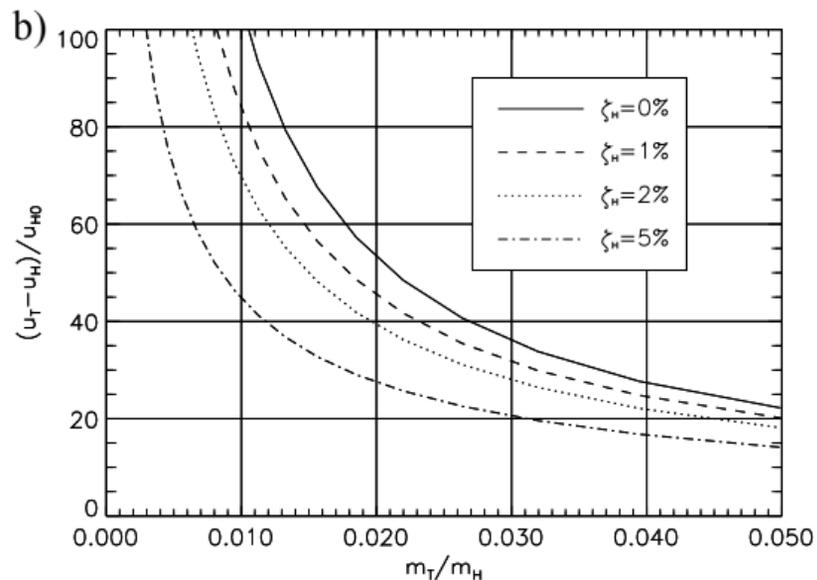
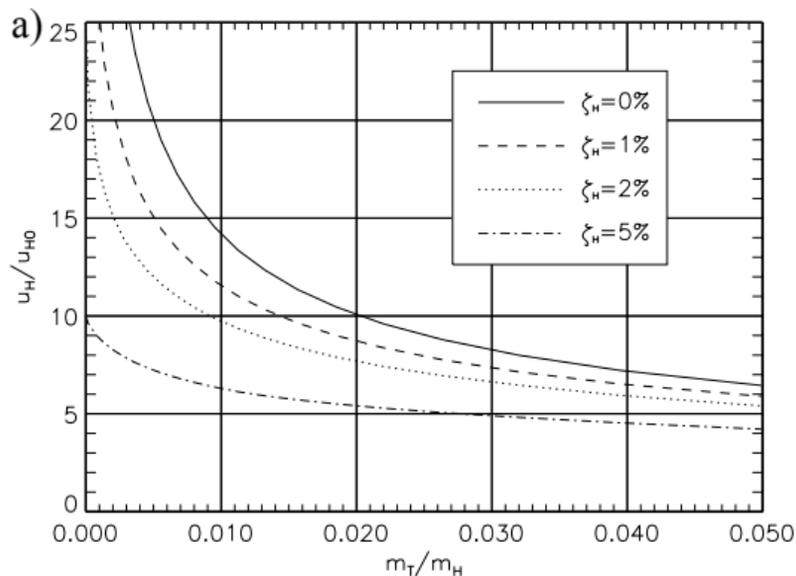


Figure 4.18: Facteurs d'amplification dynamique des déplacements en fonction du rapport m_T/m_H . Déplacements de la structure principale (a) et déplacements relatifs de l'amortisseur par rapport à la structure principale (b).

Les courbes des facteurs d'amplification dynamique mettent en évidence les conditions d'efficacité de l'amortisseur massique pour la réduction des vibrations et indiquent les domaines pratiques d'application de cet équipement.

Exemple

L'exemple est une passerelle typique en construction métallique, située près de Zurich. Elle comporte quatre travées. L'amortisseur massique est positionné au milieu de la plus grande travée.

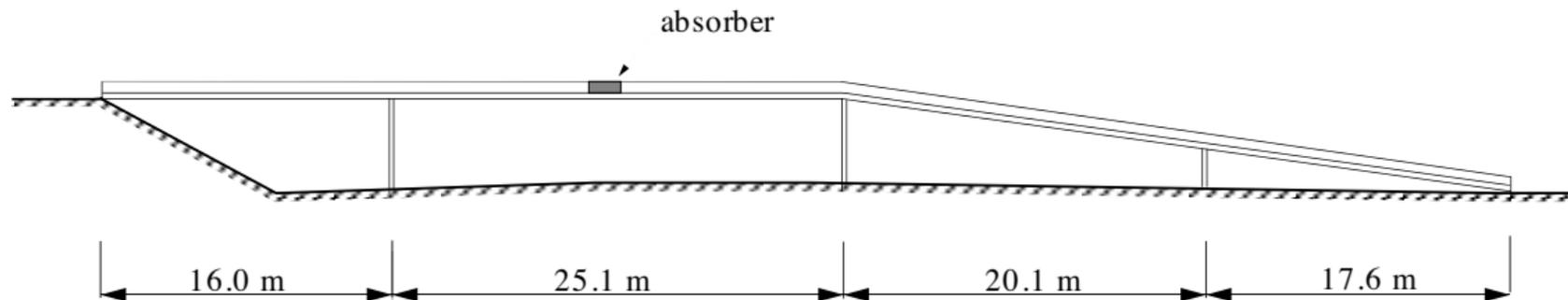


Figure 4.19: Passerelle avec l'amortisseur massique à mi-portée de la travée la plus grande.

Les propriétés dynamiques de la passerelle ont été déterminées en utilisant la généralisation de l'oscillateur simple avec les corps flexibles pour la masse et le *quotient de Rayleigh* à partir de la mesure de la fréquence fondamentale pour la rigidité:

$$f_H = 2.46 \text{ Hz}$$

$$m_H = 30500 \text{ kg}$$

$$k_H = 7280 \text{ kN/m}$$

La fréquence fondamentale tombe dans la plage problématique, car elle se situe dans la gamme de l'activité humaine, entre la fréquence de la marche (1.6 à 2 Hz) et celle de la course (2.5 à 3 Hz). De plus l'amortissement (mesures in-situ) est faible, $\zeta_H=0.2\%$ à 0.4% , selon l'amplitude des oscillations.

Pour un homme (80 kg) sautant en rythme à la fréquence fondamentale de la passerelle (facteur d'amplification de 1.6 pour la force résultant des sauts), le déplacement statique est de:

$$\delta_{\text{stat}} = \frac{1.6 \cdot 800}{k_H} = \frac{1280}{7280} \cong 0.18 \text{ mm}$$

L'accélération maximale se détermine à partir du déplacement statique multiplié par ω_n^2 (mouvement harmonique) par le facteur d'amplification dynamique (R_d) avec un amortissement de $\zeta_H=0.25\%$:

$$\ddot{x}_{\text{max}} = \omega_n^2 \cdot R_d \cdot \delta_{\text{stat}} = (2\pi \cdot f_H)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \zeta_H} \cdot \delta_{\text{stat}} = (2\pi \cdot 2.46)^2 \cdot 200 \cdot 0.18 \cong 8.5 \text{ m/s}^2$$

Cette valeur est bien trop grande. Une valeur de 0.5 m/s^2 est généralement considérée comme limite acceptable dans de telles conditions. Le facteur d'amplification dynamique doit donc être ramené d'une valeur de 200 à une valeur de 12 ($=200/(8.5/0.5)=200/17$) environ.

On y parvient avec un rapport (m_T/m_H) des masses d'approximativement 0.012 (figure 4.18a). La masse de l'oscillateur accordé doit donc être de 370 kg environ. Les paramètres optimaux du dispositif se déterminent selon *Den Hartog*:

$$f_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + 0.012} \cdot f_H = 0.988 \cdot 2.46 = 2.43 \text{ Hz}$$

$$\zeta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0.012}{8 \cdot (1 + 0.012)^3}} \cong 6.6 \%$$

Le déplacement relatif de l'amortisseur massique par rapport à la structure principale est donné par la figure 4.18b. Pour un rapport de masses de $m_T/m_H=0.012$, le facteur d'amplification dynamique correspondant atteint une valeur de 80 environ. Par conséquent, le déplacement relatif ($u_T - u_H$) de l'amortisseur massique s'élève à une valeur d'approximativement 15 mm.

Si la place disponible n'est pas suffisante pour garantir une course de 30 mm, on peut choisir un rapport des masses plus grand, 0.02 par exemple pour une course maximale de 20 mm et recommencer le processus de dimensionnement avec cette valeur.

Les mesures effectuées sur la passerelle ont clairement mis en évidence l'efficacité de l'amortisseur massique.

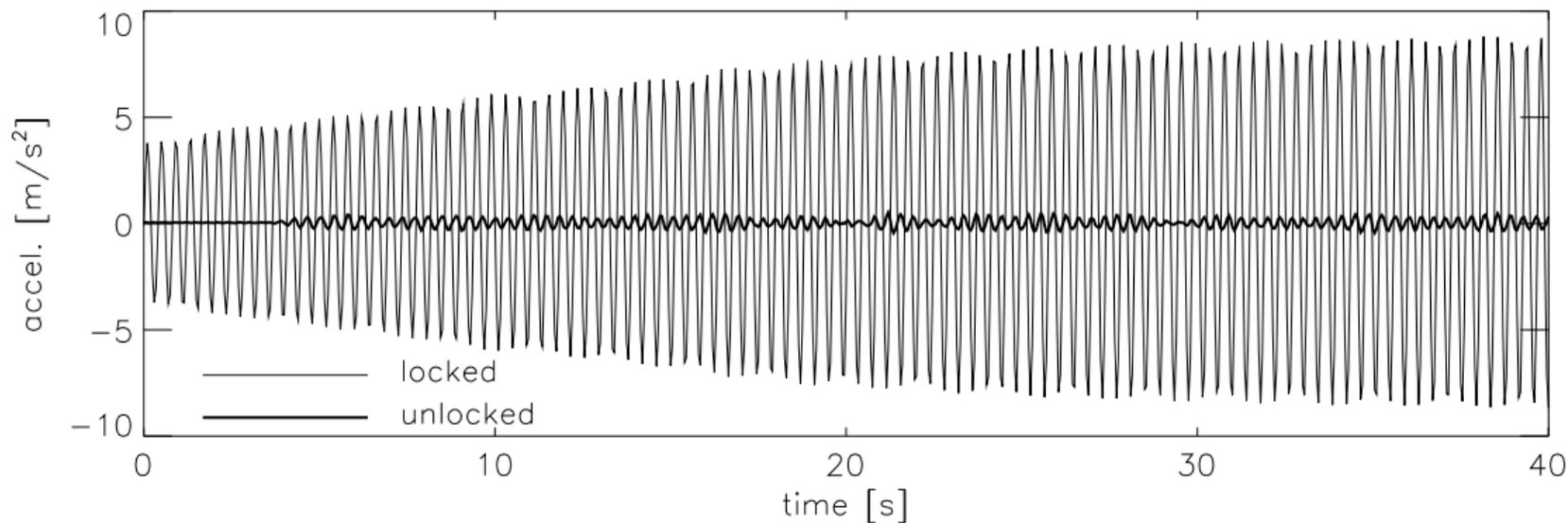


Figure 4.20: Mesures de l'accélération verticale; amortisseur massique actif et inactif.