

4 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

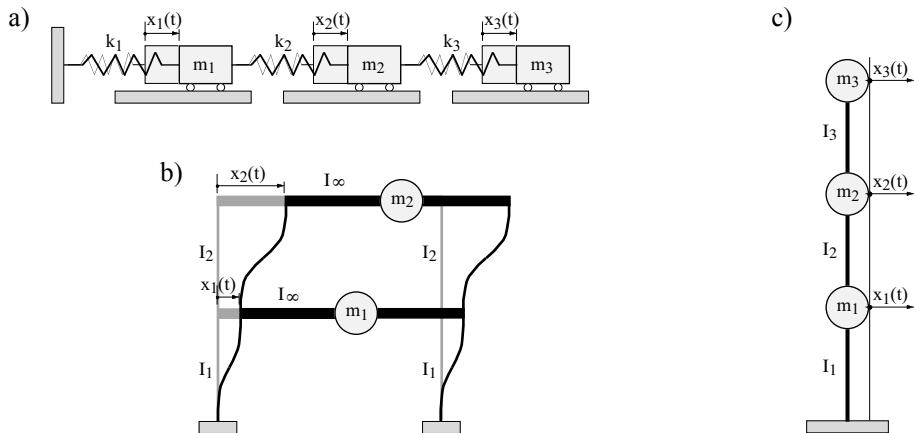
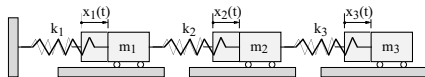


Figure 4.1: Oscillateurs multiples à trois (ou deux) masses concentrées sans amortissement. Représentation traditionnelle orientée mécanique (a) et représentations orientées structure (b, c).

4.2 Oscillations libres non amorties



Causes	$X_1 = 1$	$X_2 = 1$	$X_3 = 1$
Effets			
Forces selon X_1			
Forces selon X_2			
Forces selon X_3			

Figure 4.2: Forces agissant sur les masses pour un oscillateur multiple à trois masses concentrées sans amortissement. Seule les forces provenant de l'effet des ressorts interviennent dans les oscillations horizontales.

4.2.1 Equation du mouvement

Le système d'équations différentielles s'établit à partir des forces agissant sur chacune de ses masses:

$$\sum F_1 = -(k_1 + k_2) \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 = m_1 \cdot \ddot{x}_1$$

$$\sum F_2 = k_2 \cdot x_1 - (k_2 + k_3) \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3 = m_2 \cdot \ddot{x}_2 \quad (4.1)$$

$$\sum F_3 = k_3 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_3 = m_3 \cdot \ddot{x}_3$$

4.2.2 Forme matricielle

Ce système d'équations s'écrit de manière condensée sous la forme matricielle:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = 0 \quad (4.2)$$

ou encore avec les matrices développées:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'une manière plus générale, le système d'équations peut être exprimé sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans l'équ. (4.2), $\underline{\mathbf{M}}$ est la matrice des masses, $\underline{\mathbf{K}}$ la matrice de rigidité et $\underline{\mathbf{x}}$ le vecteur des déplacements:

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Modes propres et pulsations propres

Le système d'équations est couplé. Toutes les lignes sont interdépendantes et il n'est pas possible de procéder à une résolution simple.

En faisant l'hypothèse de déplacements harmoniques: $x_n = A_n \sin(\omega_n t - \phi)$, le système devient:

$$-\omega_n^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{x}} = 0 \quad \text{ou bien} \quad [\underline{\underline{K}} - \omega_n^2 \cdot \underline{\underline{M}}] \cdot [\underline{\underline{x}}] = 0 \quad (4.3)$$

Pour l'oscillateur à trois masses, en regroupant les termes, on obtient:

$$\begin{bmatrix} (k_{11} - \omega_n^2 m_1) & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & (k_{22} - \omega_n^2 m_2) & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & (k_{33} - \omega_n^2 m_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Le système d'équations possède d'autres solutions que la solution triviale ($x_j=0$) si la matrice a un déterminant nul.

4.2.4 Exemple cadre bi-encasté à deux étages avec traverses infiniment rigides

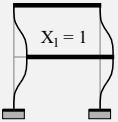
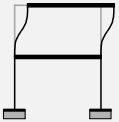
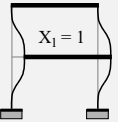
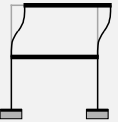
Causes			≡	Causes		
	Effets				Effets	
Forces selon X1	$\frac{12E_b}{h^3}$ ← ← $\frac{12E_b}{h^3}$ $\frac{12E_l}{h^3}$ ← ← $\frac{12E_l}{h^3}$	$\frac{12E_b}{h^3}$ → → $\frac{12E_b}{h^3}$		Forces selon X1	← k_{11}	k_{12} →
Forces selon X2	$\frac{12E_b}{h^3}$ → → $\frac{12E_b}{h^3}$	$\frac{12E_b}{h^3}$ ← ← $\frac{12E_b}{h^3}$		Forces selon X2	k_{21} →	← k_{22}

Figure 4.3: Tableau synoptique regroupant les forces nécessaires à l'établissement du système d'équations pour un cadre bi-encasté à deux étages avec des traverses infiniment rigides.

En posant $k_1 = \Sigma 12 \cdot EI_1 / h^3$ et $k_2 = \Sigma 12 \cdot EI_2 / h^3$, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans le cas particulier où $m_1 = 2 \cdot m_2 = 2m$ et $k_1 = 2 \cdot k_2 = 2k$, le système d'équations devient:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le problème aux valeurs propres $|\underline{K} - \omega_n^2 \cdot \underline{M}| = 0$ s'exprime alors de la manière suivante:

$$\begin{vmatrix} (3k - \omega_n^2 \cdot 2m) & -k \\ -k & (k - \omega_n^2 \cdot m) \end{vmatrix} = 0 = (3k - \omega_n^2 \cdot 2m) \cdot (k - \omega_n^2 \cdot m) - k^2 = 2m^2 \omega_n^4 - 5mk \omega_n^2 + 2k^2$$

L'équation caractéristique a deux solutions pour ω_n^2 :

$$\omega_n^2 = \frac{5mk \pm \sqrt{25m^2k^2 - 16m^2k^2}}{4m^2} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{2m}; \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}$$

Les pulsations propres du système valent donc:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les modes propres correspondent aux deux vecteurs propres $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ils vérifient les relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} (3k - \omega_1^2 \cdot 2m) & -k \\ -k & (k - \omega_1^2 \cdot m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & \frac{k}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3k - \omega_2^2 \cdot 2m) & -k \\ -k & (k - \omega_2^2 \cdot m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

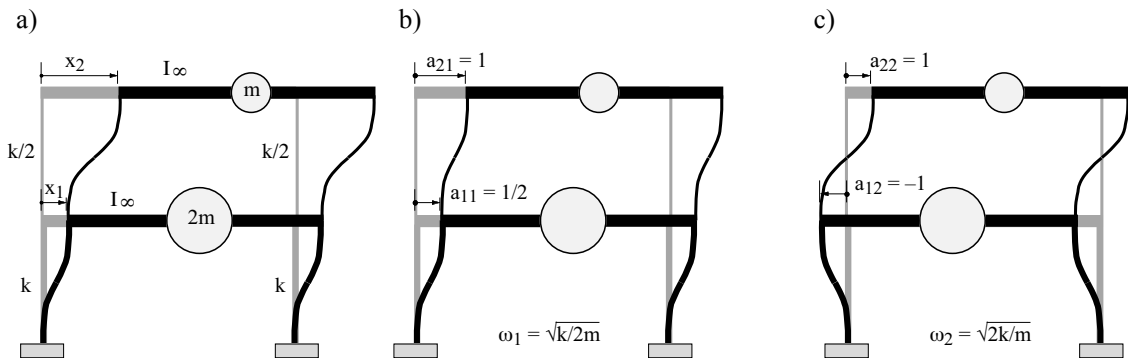


Figure 4.4: Cadre bi-encasté à deux étages avec traverses infiniment rigides (a). Modes propres (b et c).

Les vecteurs propres (modes propres) possèdent des propriétés d'orthogonalité. Pas directement entre eux, mais par rapport à la matrice de rigidité ($\underline{\mathbf{K}}$) et à la matrice des masses ($\underline{\mathbf{M}}$):

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Si toutes les masses d'étages sont identiques, alors les vecteurs propres (modes propres) sont directement orthogonaux au sens habituel du terme.

Grâce à cette propriété d'orthogonalité, les modes propres permettent d'exprimer les déplacements d'une autre manière:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z_1(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z_2(t) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \cdot z_1(t) + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \cdot z_2(t) = \sum_{n=1}^2 \underline{\mathbf{A}}_n \cdot z_n = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{z}} \quad (4.5)$$

Il s'agit d'un changement de variables par lequel les déplacements (x_j) peuvent s'exprimer en coordonnées modales (z_n). $\underline{\mathbf{A}}_n$ sont les vecteurs propres, $\underline{\mathbf{z}}$ les coordonnées modales et $\underline{\mathbf{A}}$ la matrice des vecteurs modaux.

4.2.5 Illustration du comportement dynamique

Oscillations libres non amorties du cadre, consécutives à des déplacements initiaux:

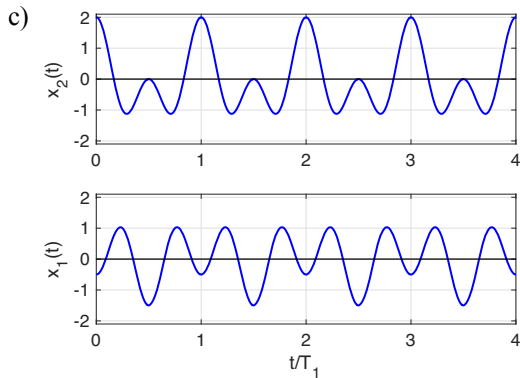
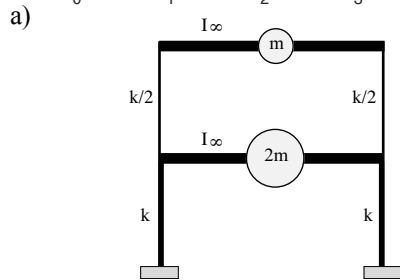
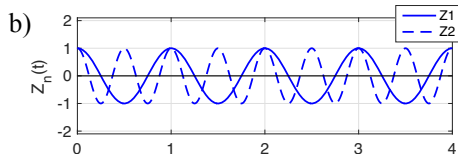


Figure 4.5: Oscillations libres non amorties du cadre bi-encasté pour des déplacements initiaux quelconques (a). Evolution au cours du temps des coordonnées modales (b) et des déplacements d'étages (c).

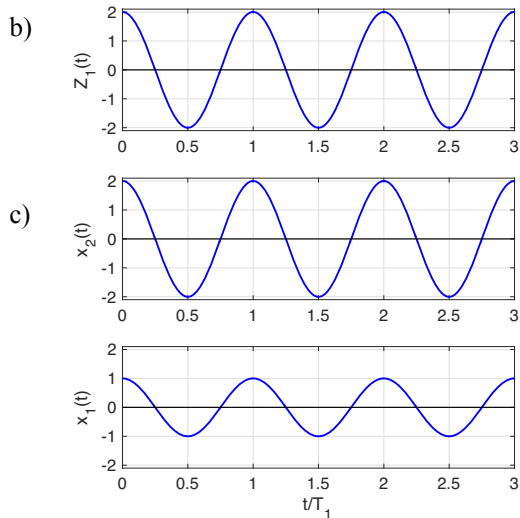
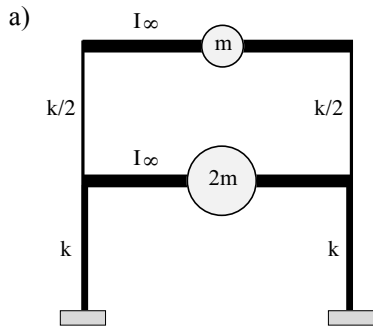


Figure 4.6: Oscillations libres du cadre bi-encasté pour des déplacements initiaux proportionnels au premier mode propre (a). Evolution au cours du temps de la coordonnée modale Z_1 (b) et des déplacements d'étages (c). Les oscillations sont harmoniques et s'effectuent exclusivement selon le premier mode.

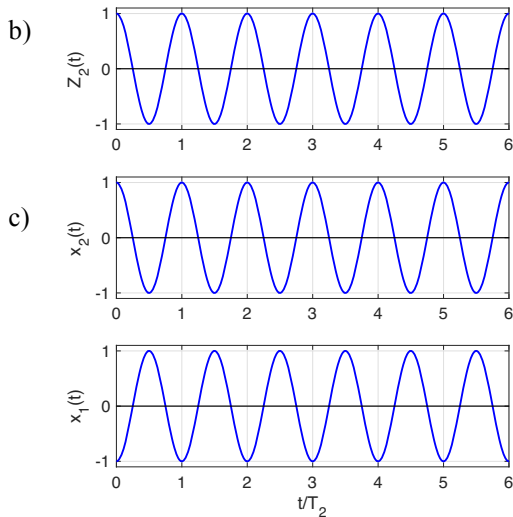
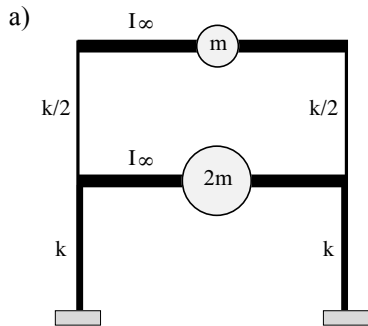


Figure 4.7: Oscillations libres du cadre bi-encasté pour des déplacements initiaux proportionnels au deuxième mode propre (a). Evolution au cours du temps de la coordonnée modale Z_2 (b) et des déplacements d'étages (c). Les oscillations s'effectuent exclusivement selon le deuxième mode.

L'amplitude des modes propres n'est pas définie. Une opération de normalisation des modes est alors nécessaire. C'est en général, celle de la déformation maximale unitaire qui est choisie.

Instructions MatLab

```
%  
%*****  
% Vecteurs propres et valeurs propres  
%*****  
[V,D]=eig(K,M);  
% frequences propres  
frequ=diag(sqrt(D)/2/pi);  
disp('Frequences propres [Hz]:')  
disp(frequ')  
%  
%*****  
% Normalisation des vecteurs propres  
%*****  
% Matrice des max des vecteurs propres  
phimax=(max(abs(V))'*diag(eye(n))')';  
% Matrice des vecteurs propres normalises  
phi=V./phimax;  
%
```

4.2.6 Matrice de rigidité

Pour la détermination de la matrice de rigidité, dans le cas de bâtiments stabilisés par des refends (voiles) en béton armé, il vaut mieux passer par l'établissement préliminaire de la matrice de flexibilité.

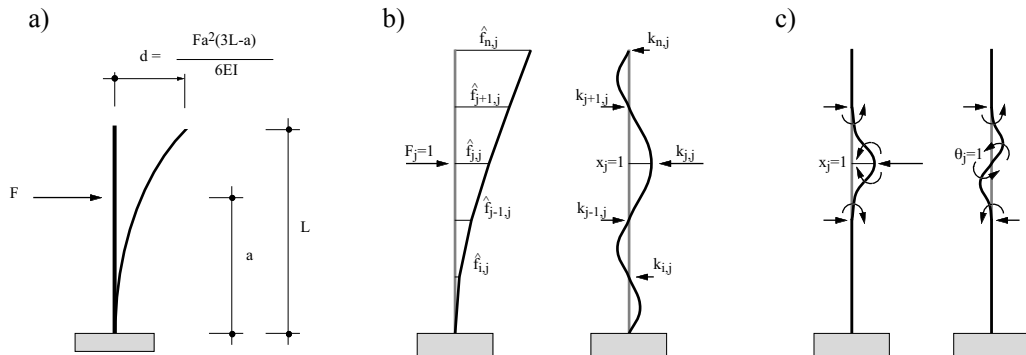


Figure 4.8: Relation à la base de l'établissement de la matrice de flexibilité (a). Les déplacements horizontaux d'étage sont les degrés de liberté. La situation se complique si les rotations d'étage doivent être considérées (c).

Les éléments de la matrice de flexibilité se déterminent selon la relation suivante:

$$\hat{f}_{ij} = \frac{1}{6 \cdot EI} \cdot h_j^2 \cdot (3 \cdot h_i - h_j), \quad i \geq j \quad (4.6)$$

Dans le cas où la hauteur des étages est constante, l'expression se simplifie de la façon suivante:

$$\hat{f}_{ij} = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot j^2 \cdot (3 \cdot i - j), \quad i \geq j \quad (4.7)$$

Pour un oscillateur multiple régulier à cinq masses concentrées, la matrice des masses \underline{M} et la matrice de flexibilité \hat{f} s'expriment de la manière suivante:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot m \quad \hat{f} = \frac{h^3}{6 \cdot EI} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité $\underline{\mathbf{K}}$ est déterminée en inversant la matrice de flexibilité $\hat{\underline{\mathbf{f}}}$:

$$\underline{\mathbf{K}} = \hat{\underline{\mathbf{f}}}^{-1} = \frac{6 \cdot EI}{h^3} \cdot \begin{bmatrix} 3.1381 & -1.9834 & 0.7956 & -0.1989 & 0.0331 \\ -1.9834 & 2.4420 & -1.7845 & 0.6961 & -0.1160 \\ 0.7956 & -1.7845 & 2.3425 & -1.5856 & 0.4309 \\ -0.1989 & 0.6961 & -1.5856 & 1.6464 & -0.6077 \\ 0.0331 & -0.1160 & 0.4309 & -0.6077 & 0.2680 \end{bmatrix}$$

Notons un avantage supplémentaire de la matrice de flexibilité $\hat{\underline{\mathbf{f}}}$ sur la matrice de rigidité $\underline{\mathbf{K}}$: un étage en plus ou en moins se traduit simplement par l'ajout ou le retrait de la ligne et de la colonne correspondante dans $\hat{\underline{\mathbf{f}}}$ alors que $\underline{\mathbf{K}}$ en est totalement modifiée.

Instructions MatLab

```
%  
% nb d'etages:n  
% vecteur des hauteurs sur etages: H [m]  
% Inertie de la section:Ic [m4]  
% module d'elasticite:Ec [N/m2]  
%  
%*****  
% Matrice de flexibilite  
%*****  
%  
for I=1:n,  
    for J=1:n,  
        if J >= I,  
            Flex(I,J)=1/(6*Ec*Ic)*H(I)^2*(3*H(J)-H(I));  
            else Flex(I,J)=1/(6*Ec*Ic)*H(J)^2*(3*H(I)-H(J));  
        end  
    end  
end  
%  
% Matrice de Rigidite  
K=inv(Flex);  
%
```

4.2.7 Quotient de Rayleigh

Le *quotient de Rayleigh* constitue une alternative à la résolution du problème aux valeurs propres. Il reflète la conservation de l'énergie lors des oscillations libres non amorties et s'exprime:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N m_j \cdot x_j^2}{\sum_{j=1}^N F_j \cdot x_j}} \quad (4.8)$$

Concrètement, seuls les déplacements d'étage (x_j) du bâtiment considéré soumis à une répartition de forces fictives (F_j) sont nécessaires. Ces déplacements peuvent être déterminés analytiquement au moyen de la matrice de flexibilité ou numériquement avec un logiciel standard d'éléments finis. L'avantage principal du *quotient de Rayleigh* réside dans le fait que même une répartition grossière des forces fictives d'étage conduit à une bonne estimation de la période fondamentale. En effet, la précision y intervient au carré de sorte qu'un écart de 10% dans la répartition des forces conduit à un écart de seulement 1% pour la période.

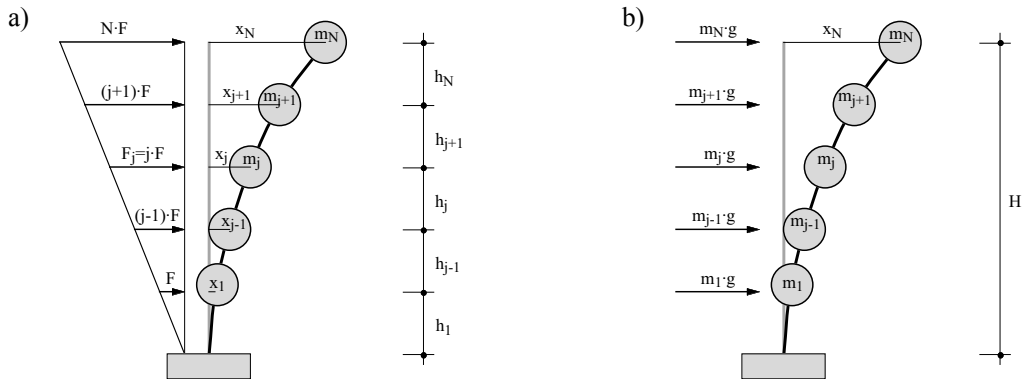


Figure 4.9: La relation générale du *quotient de Rayleigh* nécessite la détermination des déplacements d'étage dus à des forces fictives (a). Pour la version simplifiée, les forces d'étage doivent être égales aux poids de ceux-ci (b).

Une version simplifiée du *quotient de Rayleigh* utilise le déplacement au sommet (x_N) déterminé avec le poids des étages ($m_j \cdot g$) comme forces fictives:

$$T_1[s] = 2 \cdot \sqrt{x_N[m]} \quad (4.9)$$