

## 2.8.7 Force transmise par une masse

Lors d'impact par une masse en mouvement, les caractéristiques dynamiques changent si la masse reste attachée à la structure. On peut faire appel au principe de conservation de la quantité de mouvement.

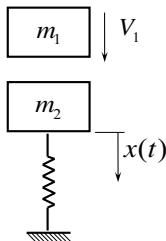


Figure 2.47: Impact dû à une masse.

Dans le cas où la masse  $m_1$  qui percute la structure reste en contact avec cette dernière, la conservation de la quantité de mouvement juste avant et juste après l'impact impose la condition suivante:

$$m_1 \cdot V_1 = (m_1 + m_2) \cdot V_2$$

Avec une structure initialement au repos et en négligeant l'amortissement, le mouvement après l'impact sera décrit par celui des oscillations non amorties avec comme conditions initiales ( $X_0=0$  et  $V_0=V_2$ ):

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t + X_0 \cdot \cos \omega_n t = \frac{V_2}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t = \frac{m_1 \cdot V_1}{(m_1 + m_2) \cdot \omega_n} \cdot \sin \omega_n t$$

La force maximale correspond au produit du déplacement maximal et de la rigidité. Avec la relation ( $\omega_n^2=k/(m_1+m_2)$ ), la force maximale est égale au produit de l'impulsion ( $m_1 \cdot V_1$ ) par la pulsation ( $\omega_n$ ):

$$F_{\max} = k \cdot x_{\max} = k \cdot \frac{m_1 \cdot V_1}{(m_1 + m_2) \cdot \omega_n} = \omega_n^2 \cdot \frac{m_1 \cdot V_1}{\omega_n} = \omega_n \cdot m_1 \cdot V_1$$

Dans le cas où il y a rebond, il faut tenir compte des quantités de mouvement avant et après impact:

$$x(t) = \frac{V_2}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t = \frac{(m_1 \cdot V_1)_{\text{avant}} - (m_1 \cdot V_1)_{\text{après}}}{m_2 \cdot \omega_n} \cdot \sin \omega_n t$$

## 2.9 Evaluation numérique

Pour la plupart des charges réelles, la résolution directe de l'équation du mouvement n'est pas indiquée d'un point de vue pratique et une des méthodes suivantes est généralement préférée:

- 1) interpolation de l'excitation;
- 2) différence centrée;
- 3) méthode de *Newmark*.

### 2.9.1 Discrétisation

La discrétisation consiste à découper la fonction de la force à intervalles généralement réguliers et à ne considérer ses valeurs qu'en ces points, souvent équidistants.

Les méthodes opèrent une intégration numérique pas à pas de l'équation du mouvement discrétisée aux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$  selon les équations suivantes:

$$m \cdot \ddot{x}_i + c \cdot \dot{x}_i + k \cdot x_i = F_i \quad (2.51)$$

$$m \cdot \ddot{x}_{i+1} + c \cdot \dot{x}_{i+1} + k \cdot x_{i+1} = F_{i+1} \quad (2.52)$$

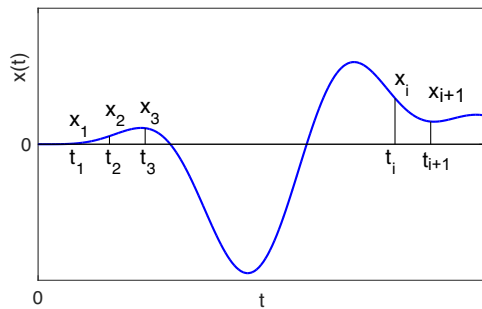
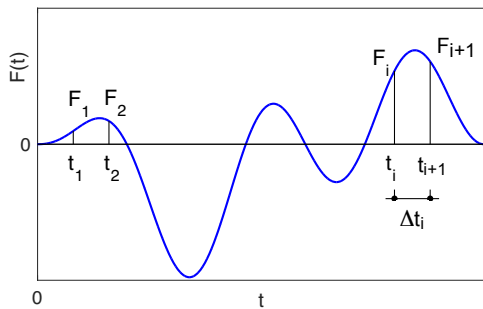


Figure 2.48: La discrétisation consiste à ne considérer que des points souvent équidistants pour y intégrer numériquement l'équation du mouvement.

Dans le cas particulier de l'excitation sismique à la base de l'oscillateur (accélération prescrite), la discrétisation de l'équation du mouvement aux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$  s'effectue selon les équations suivantes:

$$m \cdot \ddot{x}_i + c \cdot \dot{x}_i + k \cdot x_i = -m \cdot \ddot{x}_{g,i} \quad (2.53)$$

$$m \cdot \ddot{x}_{i+1} + c \cdot \dot{x}_{i+1} + k \cdot x_{i+1} = -m \cdot \ddot{x}_{g,i+1} \quad (2.54)$$

## 2.9.2 Approximation de l'équation du mouvement

Les différentes méthodes se différencient dans l'approximation utilisée. Ces approximations conditionnent leurs propriétés:

- convergence;
- stabilité;
- précision.

La convergence correspond à la rapidité à laquelle la méthode s'approche de la solution exacte. La stabilité se rapporte à l'intervalle minimal de discrétisation pour éviter une divergence dans la résolution. La précision correspond à l'écart des résultats de la méthode par rapport à la solution exacte.

### 2.9.3 Interpolation linéaire

La méthode de l'interpolation linéaire de l'excitation est basée sur la résolution analytique de l'équation du mouvement en approximant l'excitation par une interpolation linéaire entre des points de mesure.

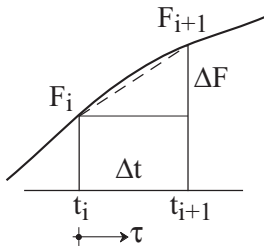


Figure 2.49: Interpolation linéaire de la force entre les instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ .

Entre les instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , la force  $F(\tau)$  est interpolée linéairement:

$$F(\tau) = F_i + \frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta t} \cdot \tau = F_i + \frac{\Delta F}{\Delta t} \cdot \tau \quad (2.55)$$

Dans le cas sismique (accélération prescrite), la force est interpolée linéairement entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ :

$$m \cdot \ddot{x}_g(\tau) = m \cdot \ddot{x}_{g,i} + \frac{m \cdot \ddot{x}_{g,i+1} - m \cdot \ddot{x}_{g,i}}{t_{i+1} - t_i} \cdot \tau = m \cdot \left( \ddot{x}_{g,i} + \frac{\Delta \ddot{x}_g}{\Delta t} \cdot \tau \right) \quad (2.56)$$

Partant des conditions initiales en  $t_i$  ( $x_i, \dot{x}_i$ ), la solution générale sans amortissement des oscillations forcées dans le cas d'une force linéaire contient deux premiers termes dus aux oscillations libres et deux autres termes correspondant à la force linéaire appliquée (partie constante et partie linéaire):

$$x(\tau) = x_i \cdot \cos \omega_n \tau + \frac{\dot{x}_i}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n \tau + \frac{m \cdot \ddot{x}_{g,i}}{k} \cdot (1 - \cos \omega_n \tau) + \frac{m \cdot \Delta \ddot{x}_g}{k} \cdot \left( \frac{\tau}{\Delta t} - \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \Delta t} \right) \quad (2.57)$$

Pour le pas suivant, le déplacement relatif est évalué en  $t_{i+1}$ , i.e. en remplaçant  $\tau$  par  $\Delta t$ :

$$x_{i+1} = x_i \cdot \cos \omega_n \Delta t + \frac{\dot{x}_i}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n \Delta t + \frac{m \cdot \ddot{x}_{g,i}}{k} \cdot (1 - \cos \omega_n \Delta t) + \frac{m \cdot \Delta \ddot{x}_g}{k} \cdot \left( 1 - \frac{\sin \omega_n \Delta t}{\omega_n \Delta t} \right) \quad (2.58)$$

L'introduction des constantes A, B, C, D permet de simplifier l'écriture:

$$x_{i+1} = A \cdot x_i + B \cdot \dot{x}_i + C \cdot \ddot{x}_{g,i} + D \cdot \ddot{x}_{g,i+1} \quad (2.59)$$

La vitesse relative en  $t_{i+1}$  s'exprime de façon analogue, mais avec d'autres constantes A', B', C' et D' :

$$\dot{x}_{i+1} = A' \cdot x_i + B' \cdot \dot{x}_i + C' \cdot \ddot{x}_{g,i} + D' \cdot \ddot{x}_{g,i+1} \quad (2.60)$$

Les constantes s'adaptent sans problème au cas plus général des oscillations amorties.

$$A = e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D \Delta t + \cos \omega_D \Delta t \right) \quad B = e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \frac{1}{\omega_D} \sin \omega_D \Delta t \right)$$

$$C = -\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \left[ \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} + e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \left( \frac{1-2\zeta^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_D \Delta t - \left( 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} \right) \cos \omega_D \Delta t \right) \right]$$



$$D = -\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \left[ 1 - \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} + e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \frac{2\zeta^2 - 1}{\omega_n \Delta t} \sin \omega_D \Delta t + \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} \cos \omega_D \Delta t \right) \right]$$

$$A' = -e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_D \Delta t \right) \qquad B' = e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \cos \omega_D \Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_D \Delta t \right)$$

$$C' = -\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \left[ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta t \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \sin \omega_D \Delta t + \frac{1}{\Delta t} \cos \omega_D \Delta t \right) \right]$$

$$D' = -\frac{1}{\omega_n^2 \cdot \Delta t} \cdot \left[ 1 - e^{-\zeta \omega_n \Delta t} \cdot \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_D \Delta t + \cos \omega_D \Delta t \right) \right]$$

```

%*****
%Calcul des coefficients A,B,C,D,Ap,Bp,Cp,Dp
%*****
%
A=e*(z/Rz*sin(wdt)+cos(wdt));
B=e/wd*sin(wdt);
C=-1/w^2*(2*z/w/dt+e*((1-2*z^2)/wdt-z/Rz)*sin(wdt)-(1+2*z/w/dt)*cos(wdt));
D=-1/w^2*(1-2*z/(w*dt)+e*((2*z^2-1)/wdt*sin(wdt)+2*z/w/dt*cos(wdt)));
Ap=-e*(w/Rz*sin(wdt));
Bp=e*(cos(wdt)-z/Rz*sin(wdt));
Cp=-1/w^2*(-1/dt+e*(w/Rz+z/dt/Rz)*sin(wdt)+1/dt*cos(wdt));
Dp=-1/w^2/dt*(1-e*(z/Rz*sin(wdt)+cos(wdt)));
%
%*****
%Calcul des deplacements x et des vitesses v
%*****
%
x(1)=0;
v(1)=0;
%
for I=1:nb-1,
    x(I+1)=A*x(I)+B*v(I)+C*Seisme(I)+D*Seisme(I+1);
    v(I+1)=Ap*x(I)+Bp*v(I)+Cp*Seisme(I)+Dp*Seisme(I+1);
end

```

## 2.9.4 Méthode de la différence centrée

Méthode basée sur l'approximation par différences finies de la vitesse et de l'accélération à l'instant  $t_i$ :

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad (2.61)$$

$$\ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.62)$$

A partir de l'équation du mouvement à l'instant  $t_i$  et en supposant que  $x_i$  et  $x_{i-1}$  soient connus, on peut extraire le déplacement relatif  $x_{i+1}$  à l'instant  $t_{i+1}$ :

$$m \cdot \ddot{x}_i + c \cdot \dot{x}_i + k \cdot x_i = -m \cdot \ddot{x}_{g,i} = m \cdot \left( \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} \right) + c \cdot \left( \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \right) + k \cdot x_i \quad (2.63)$$

$$x_{i+1} = \frac{-m \cdot \ddot{x}_{g,i} - \left( \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) \cdot x_{i-1} - \left( k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right) \cdot x_i}{\left( \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right)} \quad (2.64)$$

```

%
%*****
%Calcul initiaux kksurM, asurM, bsurM
%*****
%
kksurM=1/dt^2+z*w/dt;
asurM=1/dt^2-z*w/dt;
bsurM=w^2-2/dt^2;
%
%
%*****
%deplacements x, vitesses v, accelerations a
%*****
%
for I=2:nb-1,
    ppsurM=Seisme(I)-asurM*x(I-1)-bsurM*x(I);
    x(I+1)=ppsurM/kksurM;
    v(I)=(x(I+1)-x(I-1))/2/dt;
    a(I)=(x(I+1)-2*x(I)+x(I-1))/dt^2;
end

```

La méthode de la différence centrée est une méthode explicite; le déplacement relatif  $x_{i+1}$  à l'instant  $t_{i+1}$  est déterminé directement par l'équation du mouvement à l'instant  $t_i$  dans laquelle seuls les déplacements relatifs aux instants  $t_{i-1}$  et  $t_i$  interviennent; aucune itération n'est nécessaire. Cette propriété est très intéressante dans le cas non linéaire car la force de résistance peut alors être introduite directement.

La méthode de la différence centrée n'est pas numériquement stable dans toutes les conditions. Si l'incrément de temps  $\Delta t$  est trop grand par rapport à la période propre  $T_n$  de la structure, les erreurs numériques d'arrondis s'accumulent et la méthode diverge complètement. La condition de stabilité est donnée par la relation suivante:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi} \quad (2.65)$$

En pratique, il faut prendre un incrément de temps plus petit (deux à trois fois plus petit) pour garantir une précision suffisante des résultats. La condition de stabilité est aisément satisfaite dans le cas d'oscillateurs simples. Elle devient véritablement contraignante pour les oscillateurs multiples car c'est la fréquence la plus élevée qui dicte la condition de stabilité.

### 2.9.5 Méthode de Newmark

La méthode de *Newmark* est la plus utilisée pour l'évaluation numérique de la réponse sismique des structures. Le déplacement relatif et la vitesse à l'instant  $t_{i+1}$  sont donnés par les relations suivantes:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot (\Delta t)^2 \cdot \ddot{x}_i + \beta \cdot (\Delta t)^2 \cdot \ddot{x}_{i+1} \quad (2.66)$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot \ddot{x}_i + \gamma \cdot \Delta t \cdot \ddot{x}_{i+1} \quad (2.67)$$

La méthode de *Newmark* est en fait une application d'un développement en série limitée (expansion de *Taylor*). Les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  définissent la variation de l'accélération sur l'intervalle de temps  $\Delta t$  et déterminent la stabilité et la précision de la méthode. En général, le paramètre  $\gamma$  est fixé à  $\gamma=1/2$  et  $\beta$  est choisi dans l'intervalle  $1/6 \leq \beta \leq 1/4$ . Une valeur de  $\beta=1/6$  correspond à une variation linéaire de l'accélération et une valeur de  $\beta=1/4$  correspond à une accélération constante (accélération moyenne).

La méthode de *Newmark* est une méthode implicite; le déplacement et la vitesse (relatifs) à l'instant  $t_{i+1}$  sont déterminés par les équations du mouvement aux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ; plusieurs itérations sont nécessaires à chaque pas de temps pour déterminer les valeurs de  $x_{i+1}$  et de  $\dot{x}_{i+1}$  car l'inconnue  $\ddot{x}_{i+1}$  est présente dans le membre de droite des équations.

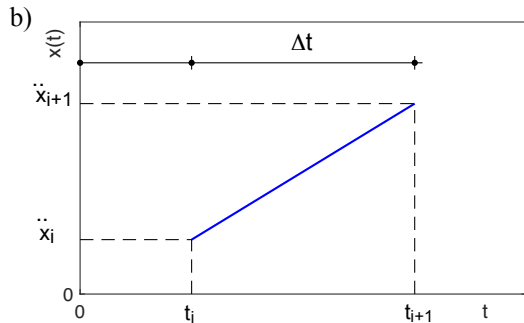
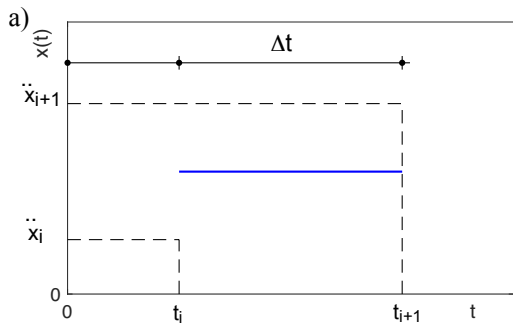


Figure 2.50: Variations de l'accélération dans la méthode de *Newmark*: constante  $\beta=1/4$  (a) et linéaire  $\beta=1/6$  (b).

La méthode de *Newmark* est soumise à des conditions de stabilité numérique. Le rapport entre l'incrément de temps  $\Delta t$  et la période propre de la structure  $T_n$  doit au moins satisfaire la condition suivante:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (2.68)$$

La méthode est inconditionnellement stable pour  $\gamma=2\beta$ , i.e. pour  $\gamma=1/2$  et  $\beta=1/4$ , fréquemment utilisé.

```

%*****
%Calcul initiaux kksurM, asurM, bsurM
%*****
%
%calculs preliminaires
kksurM=w^2+1/(beta*dt^2)+2*z*w*gama/beta/dt;
asurM=1/beta/dt+2*z*w*gama/beta;
bsurM=1/2/beta+2*z*w*dt*(gama/2/beta-1);
%
%
%*****
%deplacements x, vitesses v, accelerations a
%*****
%
for I=1:nb-1,
    dpsurM=Seisme(I+1)-Seisme(I)+asurM*v(I)+bsurM*a(I);
    dxI=dpsurM/kksurM;
    dvI=gama/beta/dt*dxI-gama/beta*v(I)+dt*(1-gama/2/beta)*a(I);
    daI=1/beta/dt^2*dxI-1/beta/dt*v(I)-1/2/beta*a(I);
    x(I+1)=x(I)+dxI;
    v(I+1)=v(I)+dvI;
    a(I+1)=a(I)+daI;
end

```