Corrigé de la série d'exercices N°4

Exercice 1

1. Amplitude des oscillations de la machine : $x_{\max} = R_d \cdot \delta_{stat}$

Le déplacement statique vaut : $\delta_{stat} = \dfrac{F_0}{K} = 4.5\,10^{-4}\ m$

Le facteur d'amplification vaut : $R_d = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\cdot\zeta^2\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$

Avec : $\omega = 2\pi\cdot f = 314\,rad/s$; $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 70.7\,rad/s$; $\dfrac{\omega}{\omega_n} = 4.44$; $\zeta = 0.2$

On trouve : $R_d = 0.053$

L'amplitude des oscillations de la machine : $x_{\max} = R_d \cdot \delta_{stat} = 0.24\,10^{-4}\,m$

2. Amplitude de la force transmise au plancher :

$$\left|F_{TR,\max}\right| = F_0 R_f = F_0\, R_d \sqrt{1+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Donc : $R_f = 0{,}108$

Et la force transmise au plancher vaut : $\left|F_{TR,\max}\right| = 49\,N$

NB : La force transmise au plancher vaut moins que l'effet de 5kg !!

3. En absence d'amortissement on a : $R_f = R_d = \dfrac{1}{\left|1-\ \omega/\omega_n{}^2\right|}$

$\left|F_{TR,\max}\right| = F_0 R_f$

Pour que la force transmise au plancher ne dépasse 10% de F_0, il faut donc avoir : $R_f \le 0.1$

Avec l'hypothèse : $\dfrac{\omega}{\omega_n} \ge 1$, on obtient : $R_f = R_d = \dfrac{1}{\omega/\omega_n{}^2 - 1} \le 0.1$

Ce qui donne : $\omega_n{}^2 \le \dfrac{\omega^2}{11}$

Et donc : $k \le 1.79\,10^6\ N/m$

Exercice 2

Période et pulsation de la perturbation : T=L/V=0.75 s ; ω= 2π/T= 8.4 rad/s

Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{K/M} = 3.16\,\mathrm{rad/s}$

$$R_f = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Amplitude verticale subie par le véhicule : $x_{\max} = x_g R_f$

$\zeta = 0$: R_f = 0,17 ; $x_{\max} = 5\,mm$

$\zeta = 0.4$: R_f = 0,37 ; $x_{\max} = 11\,mm$

Exercice 3

1. Fréquence propre du dispositif d'appui :

On est dans le cas d'un mouvement de la fondation.

f=24 Hz, M=1000 kg, x_g= 0.25 mm, x_{max-eq}=0.05 mm

$$\omega = f \cdot 2\pi = 24 \cdot 2\pi \rightarrow \omega = 150.8\, rads/s$$

$$x_{\max-eq} = x_g R_f \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad R_f = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5}$$

$$R_f = R_d \quad \text{(amortissement nul)}$$

$$R_f = \left|\frac{1}{1-\ \omega/\omega_n{}^2}\right| \leq \frac{1}{5}$$

$(R_f < 1 \Rightarrow \omega > \sqrt{2}\,\omega_n)$: enlever la valeur absolu requière un signe négatif !

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{1-\ \omega/\omega_n{}^2}\right| = -\frac{1}{1-\ \omega/\omega_n{}^2}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \geq \sqrt{5+1} \quad \Rightarrow \quad \omega_n \leq \frac{\omega}{\sqrt{6}}$$

$$\omega_n \cong 61.6\ rad\ /\ s \quad \Rightarrow \quad f_n \cong 9.8\ Hz$$

2. Détermination de la rigidité du dispositif d'appui :

Les ressorts sont placés en parallèle, les rigidités maximales s'additionnent.

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{\mathrm{K_{equ}}}{\mathrm{M}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{K_{equ}} = 2\mathrm{K_1}$$

$$\mathrm{K_1} = \frac{\mathrm{M}\omega_n^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K_1} \cong 1.89\ \mathrm{MN/m}$$

3. Rigidité requise des ressorts, avec un amortissement ζ=20%

$$\mathrm{R_f} = \frac{1}{5} \qquad et \qquad \mathrm{R_f} = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2}}$$

Soit $A = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$, avec les valeurs numériques:

$$0.2^2 = \frac{1 + 4 \cdot 0.2^2 \cdot A}{(1 - A)^2 + 4 \cdot 0.2^2 \cdot A} \quad \Rightarrow \quad A^2 - 5.84A - 24 = 0$$

$$\text{d'où} \quad A = \frac{5.84}{2} \pm \sqrt{\frac{5.84^2}{4} + 24} \quad \Rightarrow \quad A \cong 8.62$$

$$\omega_n = \omega\sqrt{\frac{1}{A}} \cong 51.3 \text{ rad/s}$$

$$K_{equ} = M{\omega_n}^2 \cong 2.64 \text{ MN/m} \quad \text{et} \quad K_1 \cong 1.32 \text{ MN/m}$$

Remarque :

$$\frac{\omega}{\omega_n} \cong 2.9 > \sqrt{2}$$

L'amortissement diminue les amplitudes. Le mouvement de la structure est hors phase. Il est donc logique que la rigidité maximale des ressorts soit plus faible dans le cas avec amortissement. (cf. figure transmissibilité dans le cours).