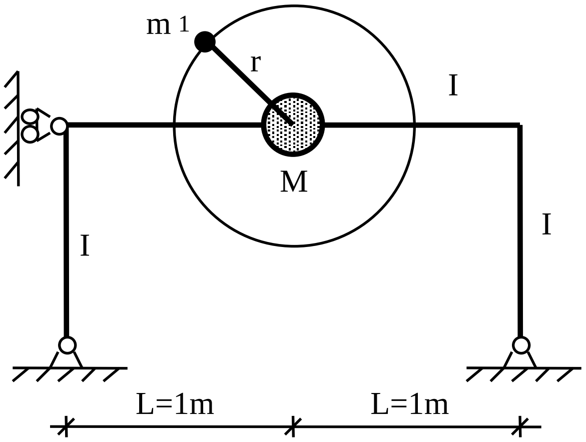
# Corrigé de la série d'exercices N°3

## Exercice 1




$$K = \frac{96 \cdot EI}{7 \cdot L^3} = 10.97 \cdot 10^6 \, N/m$$

Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{M + m_1}} = 332\, rad/s$

Contrôle des unités : $\left[\dfrac{rad}{s}\right] = \sqrt{\dfrac{\left[\dfrac{N}{m}\right]}{kg}} = \sqrt{\dfrac{\left[\dfrac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m}\right]}{[kg]}}$

- Force perturbatrice $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$ avec $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{n}{60} = 157\, rad/s$

  $F_0 = m_1 \cdot r \cdot \omega^2 = 3948 N$
- Déplacement statique : $\delta_{stat} = \dfrac{F_0}{K} = 0.36 mm$
- Amplitude des oscillations forcées : $x_{\max} = R_d \cdot \delta_{stat} = 0.46 mm$

Où $$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

avec : $\dfrac{\omega}{\omega_n} = 0.473$ ; $\zeta = 0$ ; $R_D = 1.29$

## Exercice 2

**1.** Sur la figure on voit que l'amplitude de la réponse totale diminue après quelques cycles pour se stabiliser. Cela est dû au fait que la solution homogène disparait après les quelques premières oscillations : le système est donc amorti.

**2.** Dans les oscillations forcées, la réponse totale se compose de deux sinusoïdes avec des fréquences différentes: une à celle de la force perturbatrice (correspondant à la solution particulière) et l'autre à la fréquence propre de l'oscillateur (correspondant à la solution homogène). Avec amortissement, la solution homogène disparait après quelques oscillations. Donc pour déterminer la pulsation de la force d'excitation il faut essayer d'estimer sur la courbe de la réponse de la structure la période des oscillations à amplitude constante.

Estimation : Durée pour 5 cycles = 2.74-1.21 = 1.53s

Donc : $T \simeq 0.306 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 20.53\, rad/s$

**3.** Toujours en considérant la partie de la réponse correspondant aux oscillations à amplitude constante.

$x_{\max} \simeq 98mm$

Avec : $\delta_{stat} = \frac{F_0}{K} = 0.0742m$

Et le facteur d'amplification vaut : $R_d = \frac{x_{\max}}{\delta_{stat}} = \frac{98}{74.2} = 1.32$

## Exercice 3

**1.** Non ! Pour un rapport $\omega/\omega_n \simeq \sqrt{2}$, le facteur $R_f$ est égale à 1 pour toute valeur d'amortissement.

**2.** En utilisant le diagramme de $R_f$ (pour un amortissement $\zeta = 0.01$) : Pour que $R_f$ soit inférieur à 0.1, il faut que $\frac{\omega}{\omega_n} \geq 3.3 \quad \Rightarrow \omega \geq 116.7\ rad/s$

**3.** Pour $\omega = 105\, rad/s$ ; on a : $\frac{\omega}{\omega_n} = 3$

Pour cette valeur du rapport $\omega/\omega_n$ ; le facteur d'amplification $R_f$ diminue si on diminue l'amortissement.

Pour un amortissement fixe avec $\omega/\omega_n$ proche de 3, le facteur d'amplification $R_f$ diminue si on diminue la pulsation propre du système (soit en augmentant la masse ou en réduisant la rigidité).

## Exercice 4

### a) Amortissement négligeable

La réponse totale du portique est donnée par :

$$x(t) = D\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{F_0 / k}{\left|1 - (\omega / \omega_n)^2\right|}\sin\left(\omega t\right)$$

En utilisant la forme trigonométrique de la partie transitoire de la réponse :

$$x(t) = A\sin\left(\omega_n t\right) + B\cos\left(\omega_n t\right) + \frac{F_0 / k}{\left|1 - (\omega / \omega_n)^2\right|}\sin\left(\omega t\right)$$

La vitesse est obtenue en dérivant par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = A\,\omega_n \cos\left(\omega_n t\right) - B\,\omega_n \sin\left(\omega_n t\right) + \frac{F_0 / k}{\left|1 - (\omega / \omega_n)^2\right|}\omega\cos\left(\omega t\right)$$

La rigidité horizontale du portique :

$k = 24\frac{EI_1}{h^3}$ ;

$k = 905625\ N/m$

La pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$ ;

$$\omega_n = 21,28 \; {}^{rad}\!/_{s}$$

Le déplacement statique : $\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = 11\,mm$

$$\omega / \omega_n = 0,47$$

$$\frac{F_0 \;/\; k}{1-(\omega \;/\; \omega_n)^2} = 14 \; mm$$

Les coefficients A et B sont déterminés en utilisant les conditions initiales :

$$x(0) = 0 = B$$

$$\dot{x}(0) = 0 = A\,\omega_n + \frac{F_0 \;/\; k}{1-(\omega \;/\; \omega_n)^2}\,\omega$$

Ce qui donne :

$$A = -6,64\;10^{-3} \qquad et \qquad B = 0$$

Finalement la réponse totale du portique à l’excitation sinusoïdale peut être écrite comme :

$$\boxed{x(t) = -6,6\,\sin\left(21t\right) + 14\sin\left(10t\right) \quad [mm]}$$

La réponse totale de la structure est représentée dans la figure ci-après.

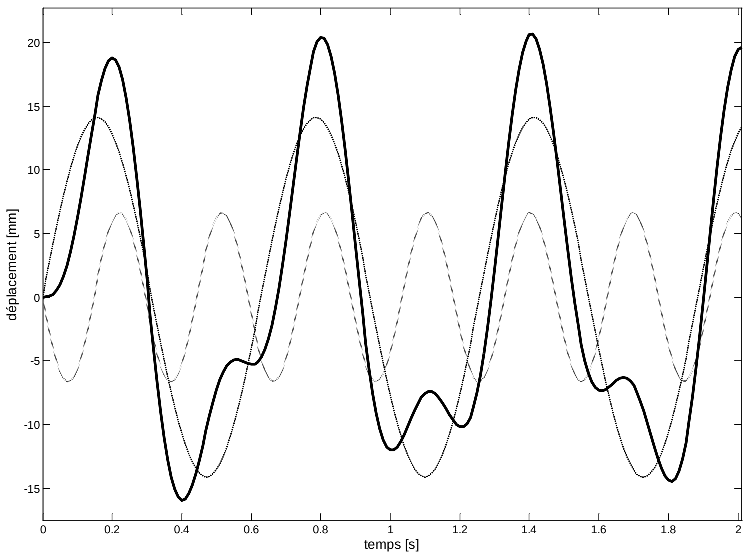



Figure 1 : La réponse totale du portique (en gras) avec les deux termes (en pointillé)

A partir de la réponse de la structure (Figure 1), on peut observer que :

- La deuxième partie de réponse (oscillations forcées) a la même fréquence que la force d'excitation et est en phase avec cette dernière puisque $\omega / \omega_n < 1$ ;
- La réponse totale n'est pas une oscillation harmonique simple ;
- La valeur maximale de la réponse totale ( >20 mm) est plus grande que la valeur du déplacement maximal correspondant aux oscillations forcées ( $x_{\max} = R_d \cdot \delta_{st} = 14,12\ mm$ ).

En réalité, il y a toujours un peu d'amortissement. Bien que les déplacements initiaux soient plus grands, l'équilibre est atteint après peu de cycles.

**b) Avec un amortissement ζ = 0,2 :**

La réponse totale du portique est donnée par :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= D\ e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_D t - \phi) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\cdot\zeta^2\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\sin(\omega t - b)$$

Avec : $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

En utilisant la forme trigonométrique de la partie transitoire de la réponse :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(C\cos\left(\omega_D t\right) + D\sin\left(\omega_D t\right)\right) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\cdot\zeta^2\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\sin(\omega t - b)$$

L'angle de déphase est donné par :

$$b = arctg\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Pour un facteur d'amortissement ζ = 0,2, on obtient :

$$\omega_D = 20,85\ rad/s$$

$$\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\cdot\zeta^2\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} = 13,72\ 10^{-3}\ m$$

$$b = 0,237\ rad\ (= 13,57°)$$

La vitesse est obtenue en dérivant *x(t)* par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = \left(D\omega_D - C\zeta\omega_n\right)e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_D t\right) - \left(D\zeta\omega_n + C\omega_D\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_D t\right) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\cdot\zeta^2\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\,\omega\cos\left(\omega t - b\right)$$

Les coefficients C et D sont déterminés en utilisant les conditions initiales :

$$x(0) = 0 = C + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\cdot\zeta^2\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\sin(-b)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = (D\omega_D - C\zeta\omega_n) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\cdot\zeta^2\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\,\omega\cos\left(-b\right)$$

Ce qui donne :

$$C = 3{,}22\ 10^{-3} \quad et \quad D = -5{,}74\ 10^{-3}$$

Finalement la réponse totale du portique à l'excitation sinusoïdale peut être écrite comme :

$$\boxed{x(t) = e^{-4{,}3t}\left(3{,}2\cos\left(21t\right) - 5{,}7\sin\left(21t\right)\right) + 14\sin\left(10t - 0.24\right) \quad [mm]}$$

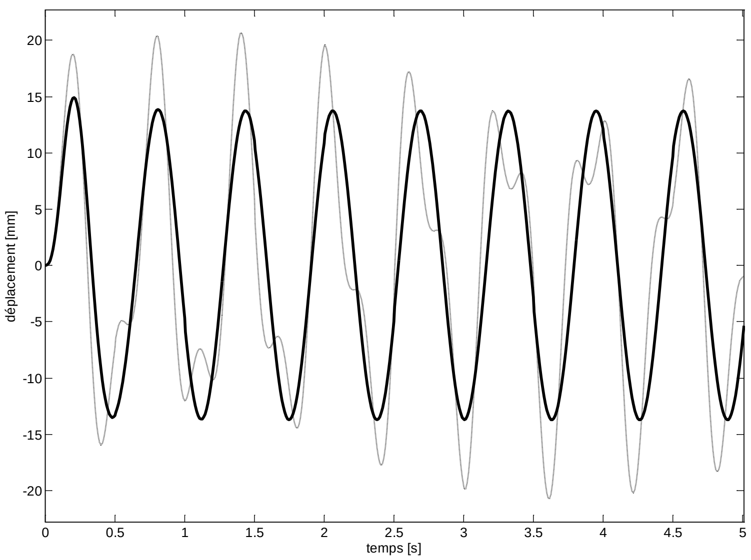



Figure 2 : La réponse totale du portique avec amortissement (en gras) et sans amortissement (en pointillé)

On peut observer que la réponse de la structure avec amortissement se stabilise rapidement en oscillations harmoniques avec une amplitude égale à la valeur de déplacement maximal : $x_{\max} = R_d \cdot \delta_{st} = 14\ mm$

## Exercice 5

Caractéristiques de la structure :
Masse : m = 2000kg

Rigidité : $k = \frac{3EI}{H^3} + \frac{12EI}{H^3} = \frac{15EI}{H^3} \quad \Rightarrow \quad k = 100.8\ 10^3\ N/m$

Amortissement : $\zeta = 0$

Pulsation propre : $\omega_n = 7.1\, rad/s$

**1.** Réponse de la structure pour $t < t_0$ :

En absence d'amortissement, la réponse totale du portique est donnée par :

$$x(t) = D\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{F_0\ /\ k}{\left|1-(\omega\ /\ \omega_n)^2\right|}\sin\left(\omega t\right)$$

En utilisant la forme trigonométrique de la partie transitoire de la réponse :

$$x(t) = A\sin\left(\omega_n t\right) + B\cos\left(\omega_n t\right) + \frac{F_0\ /\ k}{\left|1-(\omega\ /\ \omega_n)^2\right|}\sin\left(\omega t\right)$$

La vitesse est obtenue en dérivant par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = A\,\omega_n\cos\left(\omega_n t\right) - B\,\omega_n\sin\left(\omega_n t\right) + \frac{F_0\ /\ k}{\left|1-(\omega\ /\ \omega_n)^2\right|}\omega\cos\left(\omega t\right)$$

Le déplacement statique : $\delta_{stat} = \frac{F_0}{k} = 0.496m$

La pulsation de la force d'excitation : on a $T = 2s \quad \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 3.14\, rad/s$

$$\omega/\omega_n = 0,442$$

$$\frac{F_0\ /\ k}{\left|1-(\omega\ /\ \omega_n)^2\right|} = 616\ mm$$

Les coefficients A et B sont déterminés en utilisant les conditions initiales :

$$x(0) = 0 = B$$

$$\dot{x}(0) = 0 = A\,\omega_n + \frac{F_0\ /\ k}{\left|1-(\omega\ /\ \omega_n)^2\right|}\omega$$

Ce qui donne :

$$A = -272.2\ 10^{-3} \qquad et \qquad B = 0$$

Finalement la réponse totale du portique à l'excitation sinusoïdale peut être écrite comme :

$$\boxed{x(t) = -272.2\ \sin\left(7.1t\right) + 616\sin\left(3.14t\right) \quad [mm]}$$

**2.** Réponse de la structure pour $t \geq t_0$ :

A l'instant: $t = t_0$, la force de perturbation s'annule. Le portique continue à osciller à cause des conditions initiales non nulles (déplacement et vitesse à l'instant t=1s). Les vibrations correspondent alors à un cas d'oscillations libres non amorties.

La réponse de la structure s'écrit alors :

$$x(\overline{t}) = \sqrt{X_0^{\,2} + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2} \cos\left(\omega_n \overline{t} - a\tan\left(\frac{V_0}{\omega_n . X_0}\right)\right) \quad ; \quad \overline{t} = t - t_0$$

Avec :

$$X_0 = x(\overline{t} = 0) = x(t = 1s) = -0.198\, m$$

$$V_0 = \dot{x}(\overline{t} = 0) = \dot{x}(t = 1s) = -3.257\, m/s$$

La réponse du portique peut être écrite comme :

$$\boxed{x(\overline{t}) = 500 \cos\left(7.1\overline{t} - 1.163\right) \quad [mm]}$$