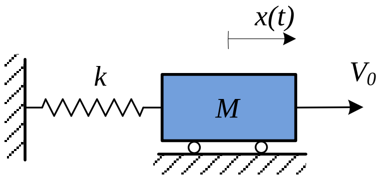
Corrigé de la série d'exercices N°1

Exercice 1

On considère les deux systèmes de la figure ci-dessous.



1. La rigidité équivalente des deux systèmes:

a) $K_{equ} = \frac{A_0 E}{L}$

b) $\frac{1}{K_{equ}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{L}{4A_0E} + \frac{3L}{16A_0E} \Rightarrow K_{equ} = \frac{16A_0E}{7L}$

2. Expression de la contrainte maximale à l'encastrement pour les deux systèmes :

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{A_0} \quad et \quad F_{\max} = K_{equ} x_{\max} = \frac{V_0}{\omega_n} K_{equ} = \frac{V_0 \cdot \sqrt{M}}{\sqrt{K_{equ}}} K_{equ} = V_0 \cdot \sqrt{M} \cdot \sqrt{K_{equ}}$$

avec : $A_0 = \frac{\pi d^2}{4}$; K_{equ} : rigidité équivalente de la barre

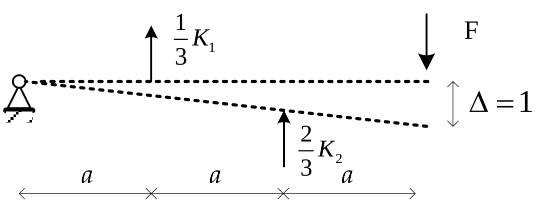
$$\sigma = \frac{V_0 \sqrt{M}}{A_0} \sqrt{K_{equ}}$$

Ainsi, le rapport maximum des contraintes à l'encastrement entre les deux systèmes :

$$\frac{\sigma_{syst\,b}}{\sigma_{syst\,a}} = \sqrt{\frac{16}{7}} \cong 1.51$$

Exercice 2

1. La rigidité équivalente du système est égale à la force nécessaire pour avoir un déplacement unité au droit de la masse. Cette force est équilibrée par les forces de rappel au droit des ressorts :



$$\sum M_A = F3a - \frac{2}{3}K_2 2a - \frac{1}{3}K_1 a = 0 \Rightarrow F \cong K_{equ} = \frac{1}{9}K_1 + \frac{4}{9}K_2$$

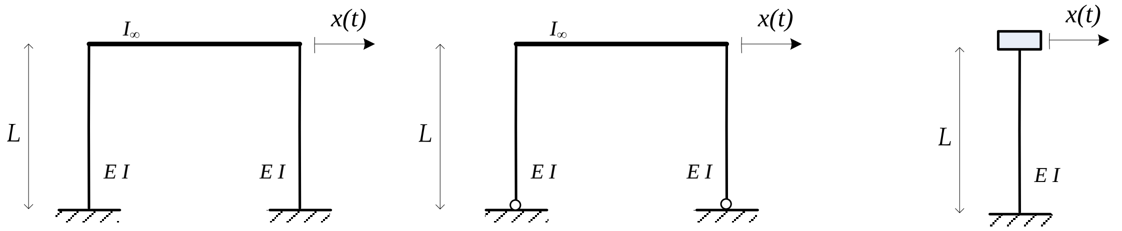
$avec : K_2 = 2K_1 \Rightarrow K_{equ} = K_1$

Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{equ}}{M}} \cong 100 rad / s$

Fréquence propre : $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \cong 15.9 Hz$

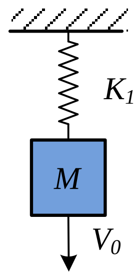
2. La pulsation et la fréquence propres sont indépendantes de l'accélération g.

Exercice 3



$K_{eq} = \frac{24EI}{L^3}$ $\quad$ $K_{eq} = \frac{6EI}{L^3}$ $\quad$ $K = \frac{3EI}{L^3}$

Exercice 4



Rigidité : $K_1 = \frac{AE}{L} = 5.75 \cdot 10^6 \, \frac{N}{m}$

Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{M}} \cong 33.9 \, \frac{rad}{s}$

Déplacement statique : $\delta_{st} = \frac{Mg}{K_1} \cong 8.6mm$

Déplacement maximal dynamique : $x_{\max-dyn} = \frac{V_0}{\omega_n} \cong 29.5mm$

a) Contrainte maximale :

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{st} + F_{\max-dyn}}{A} = \frac{K_1\delta_{st} + K_1 x_{\max-dyn}}{A} = \frac{K_1\delta_{st}}{A}\left(1 + \frac{x_{\max-dyn}}{\delta_{st}}\right) = \sigma_0\left(1 + \frac{x_{\max-dyn}}{\delta_{st}}\right) = 4.43\sigma_0$$

b) Facteur d'augmentation des contraintes : $F_{AC} = 1 + \frac{x_{\max-dyn}}{\delta_{st}} = 1 + C$

$$C = \frac{x_{\max-dyn}}{\delta_{st}} = \frac{\frac{V_0}{\omega_n}}{\frac{Mg}{K_{equ}}} = \frac{V_0 K_{equ}}{\omega_n Mg} = \frac{V_0 K_{equ}}{\sqrt{\frac{K_{equ}}{M}}Mg} = \frac{V_0}{g}\sqrt{\frac{K_{equ}}{M}} \qquad \Rightarrow K_{equ} = \frac{C^2 M g^2}{V_0^{\,2}}$$

(avec $C = 2$, $K_{equ} = 2 \cdot 10^6 \, \frac{N}{m}$)

Les ressorts sont montés en série : $\frac{1}{K_{equ}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \Rightarrow K_2 = \frac{K_1 \cdot K_{equ}}{K_1 - K_{equ}} \cong 3.07 \cdot 10^6 \, \frac{N}{m}$